Análisis Combinatorio

Silvio Reggiani

Álgebra y Geometría Analítica II (LCC)
FCEIA - UNR

17 de octubre de 2016

Definición

Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es

- **inyectiva** si $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ (o equivalentemente $f(x) = f(y) \implies x = y$);
- **suryectiva** o **sobreyectiva** si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.

Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, la **composición** $g \circ f : X \to Z$ se define como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ejercicio

1. Si f, g inyectivas (resp. suryectivas) entonces $g \circ f$ inyectiva (resp. suryectiva).
2. Si $g \circ f$ inyectiva (resp. suryectiva) entonces f (resp. g es suryectiva).

Ejemplo

$X = \{1, 2, 3\}$. Determinar todas las funciones de X sí mismo.

$$f : X \to X \leftrightsquigarrow (f(1), f(2), f(3))$$

$$\begin{array}{ccc}
(1,1,1) & (2,1,1) & (3,1,1) \\
(1,1,2) & (2,1,2) & (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{2}) \\
(1,1,3) & (\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3}) & (3,1,3) \\
(1,2,1) & (2,2,1) & (\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{1}) \\
(1,2,2) & (2,2,2) & (3,2,2) \\
(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) & (2,2,3) & (3,2,3) \\
(1,3,1) & (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1}) & (3,3,1) \\
(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{2}) & (2,3,2) & (3,3,2) \\
(1,3,3) & (2,3,3) & (3,3,3)
\end{array}$$

Hay $27 = 3^3$ funciones y $6 = 3!$ funciones biyectivas.

- Si $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ denotamos

$$[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq n\}.$$

- $|[\![m, n]\!]| = n - (m-1) = m - n + 1.$

Teorema (Principio de las casillas)

Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$, entonces no existe ninguna función inyectiva $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$. En palabras, si debemos ubicar n objetos en m casillas, entonces deberemos poner más de un objeto en una casilla.

Dem.

- $H := \{n \in \mathbb{N} : \text{existen } m < n,\ f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!] \text{ inyectiva}\}$
- Debemos ver $H = \varnothing$.
- Si así no fuera, sea $h \in H$ el 1er elemento de H (PBO).
- Existen $m < h$ y $f : [\![1, h]\!] \to [\![1, m]\!]$ inyectiva.

Dem. (cont.)

- Sean $c = f(h)$, $g : [\![1, m]\!] \to [\![1, m]\!]$, $g(i) = \begin{cases} i, & i \neq c, m \\ m, & i = c \\ c, & i = m \end{cases}$
- $g \circ g = \mathrm{id}_{[\![1,m]\!]}$, luego g es biyectiva.
- $i \in [\![1, h-1]\!] \implies g(f(i)) \in [\![1, m-1]\!]$
- $\tilde{f} : [\![1, h-1]\!] \to [\![1, m-1]\!]$, $\tilde{f}(i) := g(f(i))$
- $\tilde{f}$ es inyectiva, pues $g \circ f$ lo es.
- Luego $h - 1 \in H$. Absurdo. $\square$

Corolario

Si $n \neq m$, no existe $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$ biyectiva.

Corolario

$f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ es inyectiva sii es sobreyectiva sii es biyectiva.

Ejemplo

1. Dadas 13 personas, hay dos que cumplen años el mismo mes.
2. En Rosario hay al menos dos personas con la misma cantidad de cabellos en la cabeza.

Ejemplo

Sea A un conjunto de $m \geq 2$ personas. Existen en A dos personas con el mismo número de amigos (en A).

- Si $a, b \in A$, a amigo de b sii b amigo de a.
- a es amigo de a para todo $a \in A$.
- $f(x) :=$ número de amigos de x en A.
- $f : A \to [\![1, m-1]\!]$ o $f : A \to [\![2, m]\!]$ (si alguien tiene m amigos, nadie puede tener sólo un amigo).
- Por el ppio. de las casillas existen $x_1 \neq x_2$ en A tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

Definición

Un conjunto X tiene **cardinalidad** $n \in \mathbb{N}$ si existe una función biyectiva $f : [\![1, n]\!] \to X$ y se denota $|X| = n$. Para $X = \varnothing$ definimos $|X| = 0$. Estos conjuntos se llaman *conjuntos finitos*.

Teorema (Principio de adición)

Si A, B *son dos conjuntos finitos* **disjuntos** *entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Dem.

- $|A| = n$, $|B| = m$.
- Existen $f : [\![1, n]\!] \to A$, $g : [\![1, m]\!] \to B$ biyectivas.
- $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\![1, n]\!] \\ g(x - n), & x \in [\![n + 1, n + m]\!] \end{cases}$
- $h : [\![1, n + m]\!] \to A \cup B$ es biyectiva. $\square$

Corolario

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son conjuntos disjuntos entonces*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Ejercicio

1. Si A, B son conjuntos finitos entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2. Si A, B, C son conjuntos finitos entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

3. Generalizar.

Teorema

Si A, B conjuntos finitos entonces $|A \times B| = |A||B|$.

Dem.

- $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$.
- Veamos $|A \times B| = nm$.
- Fijo m, hacemos inducción en n.
- $n = 1$, $A \times B = \{(a_1, b_1), \dots, (a_1, b_m)\}$.
- $f : [\![1, m]\!] \to A \times B$, $f(i) = (a_1, b_i)$ es biyectiva.
- $|A \times B| = m = 1 \cdot m$.
- Supongo cierto para n y sea $A = \{a_1, \dots a_n, a_{n+1}\}$.
- $A \times B = ((A - \{a_{n+1}\}) \times B) \cup (\{a_{n+1}\} \times B)$ (disjunta).
- Por HI y el ppio. de adición,

$$|A \times B| = nm + m = (n+1)m. \quad \square$$

Corolario

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Denotamos

- $\mathcal{F}(A, B)$ el conjunto de **todas** las funciones de A en B.
- $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$ la familia de **todos** los subconjuntos de A (incluye al conjunto vacío).

Proposición

Sean A, B conjuntos tales que $|A| = n$, $|B| = m$. Entonces

1. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$,
2. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Dem.

Para la primera parte:

- $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- Toda $f : A \to B$ se identifica con

$$(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) \in \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n \text{ veces}}.$$

- Luego $|\mathcal{F}(A, B)| = |B \times B \times \cdots \times B| = m^n$.

Para la segunda parte:

- Todo $X \subset A$ se identifica con $\chi_X : A \to \{0, 1\}$, donde

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin X \\ 1, & x \in X \end{cases} \qquad \textbf{función característica de } X.$$

- Luego $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}(A, \{0, 1\})| = 2^n$. $\square$

Ejemplo

¿Cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo, blanco, azul y verde? (Se permiten dos o más franjas del mismo color.)

Rta: $|\mathcal{F}(\{1,2,3\},\{R,B,A,V\})| = 4^3 = 64$.

Ejemplo

¿Cuántos dientes hacen falta para crear un millón de combinaciones diferentes en una llave con ocho posiciones de profundidad?

Rta: Si m es el número de posiciones, la cantidad de de llaves distintas será

$$|\mathcal{F}(\{1,\dots,m\},\{1,\dots 8\})| = 8^m > 10^6.$$

$$2^8 = 256 \implies 2^8 \cdot 4 = 2^{10} > 1000 = 10^3 \implies 2^{20} > 10^6$$

$$\implies 2^{21} = 8^7 > 10^6 > 8^6 \implies m = 7.$$

Ejemplo

¿Cuántos números capicúas de cinco dígitos hay?

- Capicúa: $xyzyx$, $x \in [\![1, 9]\!]$, $y, z \in [\![0, 9]\!]$
- Rta: $9 \cdot 10^2 = 900$

Definición

- $\mathcal{F}_i(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \text{ inyectiva}\}$
- $\mathcal{F}_b(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : f \text{ biyectiva}\}$

- ¿Cuántos elementos hay en $\mathcal{F}_i(A, B)$? ¿y en $\mathcal{F}_b(A, B)$?
- Vimos que $|\mathcal{F}_i(A, B)| = 0$ si $|A| > |B|$.

Teorema

Si $|A| = n$, $|B| = m$ y $n \leq m$ entonces

$$|\mathcal{F}_i(A, B)| = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Dem.

- $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- $f : A \to B \leftrightsquigarrow (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$
- Si $f \in \mathcal{F}_i(A, B)$ entonces:
- $f(a_1)$ tiene m valores posibles,
- $f(a_2)$ tiene $m-1$ valores posibles (pues $f(a_2) \neq f(a_1)$),
- $f(a_3)$ tiene $m-2$ valores posibles,
- ...
- $f(a_n)$ tiene $m-(n-1)$ valores posibles.
- $|\mathcal{F}_i(A, B)| = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1)) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Corolario

Si $n = m$ *entonces* $|\mathcal{F}_b(A, B)| = m!$

Ejemplo

¿Cuántas banderas distintas pueden armarse con 3 bandas verticales con los colores rojo, blanco, azul, verde si no puede haber dos bandas del mismo color?

Rta: $|\mathcal{F}_i(\{1,2,3\},\{R,B,A,V\})| = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$

Ejemplo

Si en un colectivo hay 10 asientos vacíos, ¿de cuántas maneras distintas pueden sentarse 7 personas? Rta:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_i([\![1,7]\!],[\![1,10]\!])| &= \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 604800. \end{aligned}$$

Sea A un conjunto m elementos y sea $n \leq m$.

- Un **arreglo** o una **selección ordenada** de n elementos de A es una función inyectiva $f : [\![1, n]\!] \to A$. Es común representar un arreglo con una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ en donde $a_i \in A$ son todos distintos.
- Si $n = m$, el arreglo se llama **permutación** de m elementos.
- Si dejamos de lado el orden y seleccionamos n objetos entre m dados, se obtiene una **combinación** de n elementos tomados de un conjunto con m elementos.

Ejemplo

$$
\begin{array}{ll}
A = \{a, b, c, d\} & (a, b, c), (b, c, a), (a, d, c) \quad \text{(arreglos)} \\
B = \{x, y, z\} & (x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y), \\
 & (z, y, x) \quad \text{(permutaciones)} \\
C = \{1, 2, 3, 4, 5\} & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\} \\
 & \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\} \;\; \text{(comb.)}
\end{array}
$$

- $A(n,m)$ arreglos de n elementos tomados de m.
- $P(m) = A(m,m)$ permutaciones de m elementos
- $C(n,m)$ combinaciones de n elementos tomados de m.

Proposición

Si $n \leq m$, entonces

1. $|A(n,m)| = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
2. $|P(m)| = m!$
3. $|C(n,m)| = \dfrac{|A(n,m)|}{|P(n)|} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

Número combinatorio ($n \leq m$)

$$\binom{m}{n} := \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Representa la cantidad de formas distintas de elegir n objetos tomados de entre m **sin considerar el orden**.

Convención: $0! = 1$, luego $\binom{m}{0} = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Teorema

Sean $n \leq m$, entonces

1. $\binom{m}{1} = m$
2. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
3. $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$ *(Triángulo de Pascal)*
4. $\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^m$

Dem.

1. $\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = m$. **Otra forma:** $\binom{m}{1}$ es la cantidad de subconjuntos de 1 elemento de $\{1, \ldots, m\}$.

Dem. (cont.)

2. $$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!} = \binom{m}{m-n}.$$

   Otra forma: elegir n elementos de entre n es lo mismo que "no elegir" $m-n$ elementos de entre n.

3. Hacerlo por definición como ejercicio.
   Otra forma: si queremos elegir n elementos del conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$, podemos hacerlo eligiendo n elementos de $A - \{a_{m+1}\}$, para lo cual hay $\binom{m}{n}$ posibilidades, o bien, eligiendo $n-1$ elementos en $A - \{a_{m+1}\}$ y luego agregando a_{m+1}, para lo cual hay $\binom{m}{n-1}$ posibilidades. Luego

   $$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}.$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{0}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

Ejercicio

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
\iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots &
\end{array}
$$

$$1 + 1 = 2 = F_3$$

$$1 + 2 = 3 = F_4$$

$$1 + 3 + 1 = 5 = F_5$$

$$1 + 4 + 3 = 8 = F_6$$

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13 = F_7$$

$$1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8$$

$$1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9$$

¿vale siempre?

Dem. (cont.)

4. Recordemos que $|\mathcal{P}([\![1, m]\!])| = 2^m$.

- $\mathcal{P}_n([\![1, m]\!]) := \{A \subset [\![1, m]\!] : |A| = n\}$
- $\mathcal{P}([\![1, m]\!]) = \bigcup_{n=0}^{m} \mathcal{P}_n([\![1, m]\!])$ (unión disjunta)
- $|\mathcal{P}_n([\![1, m]\!|) = \binom{m}{n}$
- $2^m = |\mathcal{P}([\![1, m]\!])| = \sum_{n=0}^{m} |\mathcal{P}_n([\![1, m]\!])| = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}$ $\square$

Ejemplo

1. $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!\,5!} = 8 \cdot 7 = 56$
2. $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!\,4!} = 3 \cdot 5 = 15$

Ejemplo

Hallar n tal que $3\binom{n}{4} = 5\binom{n-1}{5}$.

- $3\,\dfrac{n!}{4!(n-4)!} = 5\,\dfrac{(n-1)!}{5!(n-6)!}$
- $3\,\dfrac{n(n-1)!}{4!(n-4)(n-5)(n-6)!} = 5\,\dfrac{(n-1)!}{5\cdot 4!(n-6)!}$
- $\dfrac{3n}{(n-4)(n-5)} = 1 \implies 3n = (n-4)(n-5) = n^2 - 9n + 20$
- $n^2 - 12n + 20 = 0 \implies n = \dfrac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{12 \pm 8}{2} = \begin{cases} 2 \\ 10 \end{cases}$
- Sol: $n = 10$ (la otra solución no tiene sentido).

Ejemplo

¿Cuántos equipos de fútbol pueden armarse con 18 jugadores?

Rta: $\binom{18}{11} = \frac{18!}{11!\,7!} = 31824$.

Ejemplo

¿Cuántos equipos de fútbol pueden armarse con línea 1-4-4-2 si se cuenta con

- 3 arqueros,
- 6 defensores,
- 5 mediocampistas,
- 4 delanteros?

Rta: $\binom{3}{1}\binom{6}{4}\binom{5}{4}\binom{4}{2} = 3 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 6 = 1350.$

Ejemplo

¿Cuántas rectas hay en el plano determinadas por 10 puntos no colineales?

Rta: 2 de estos 10 puntos determinan una única recta, luego hay $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ rectas determinadas por estos 10 puntos.

Ejemplo

¿Cuántos números distintos pueden armarse usando (todos) los dígitos 1112233345?

Una forma: si los dígitos fueran todos distintos tendríamos 10! posibilidades, pero debemos dividir por la cantidad de permutaciones de los dígitos repetidos. Rta: $\dfrac{10!}{3!\,2!\,3!} = 50400$.

Otra forma: para armar un número de 10 cifras tenemos que elegir 3 lugares para ubicar los 1s, de los 7 lugares restantes elegimos 2 lugares para ubicar los 2, de los 5 restantes elegimos 3 para ubicar los 3s, de los 2 restantes elegimos un lugar para el 4 y en el lugar que sobra va el 1. Rta:

$$\begin{aligned}\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} &= \frac{10!}{3!\,7!}\cdot\frac{7!}{2!\,5!}\cdot\frac{5!}{3!\,2!}\cdot 2!\cdot 1\\ &= \frac{10!}{3!2!3!} = 50400\end{aligned}$$

Ejemplo

1. ¿Cuántos comités distintos de 3 personas pueden armarse con 5 varones y 4 mujeres?
2. ¿Cuántos de estos comités tienen al menos una mujer?

Rta:

1. $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$
2. A la cantidad total de comités debemos restarle la cantidad de comités que están formados sólo por varones:

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 84 - \frac{5!}{3!\,2!} = 84 - \frac{5 \cdot 4}{2} = 84 - 10 = 74$$

Ejemplo

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa circular?

Rta: $8!/8 = 7! = 5040$ (8! son las distintas formas en las que las ocho personas pueden elegir los asientos, pero debemos dividir por 8 que es la cantidad de rotaciones de una misma configuración).

Ejemplo

¿Cuántas pulseras distintas se pueden armar con 8 piedras de distintos colores?

Rta: $8!/(8 \cdot 2) = 7!/2 = 2520$.

El razonamiento es similar al del ejemplo anterior, pero ahora además debemos dividir por las 2 reflexiones de una configuración dada (esto no lo hicimos antes, porque cuando está sentado la cabeza queda para arriba).

Definición

Se define la **probabilidad** de un evento como $\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

Ejemplo

En el juego del truco,

1. ¿Cuál es la probabilidad de tener 33?
2. ¿Cuál es la probabilidad de tener el macho?
3. ¿Cuál es la probabilidad de tener el macho y un 3?

Recordar:

- El truco se juega con 40 cartas españolas (todas excepto los 8s, los 9s y los comodines). Se reparten 3 cartas a cada jugador. Manos posibles: $\binom{40}{3} = 9880$.
- Para tener una mano con 33 se necesitan un 6 y un 7 del mismo palo.
- El macho es el 1 de espadas.

Ejemplo (cont.)

1. Hay 38 manos posibles con el 6 y el 7 de espadas (ídem con basto, oro y copa), luego la probabilidad de tener 33 es

$$\frac{4 \cdot 38}{\binom{40}{3}} = \frac{4 \cdot 38}{\frac{40!}{3!\,37!}} = \frac{4 \cdot 38}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2}} = \frac{6}{390} \approx 0,015 \qquad (1,5\,\%)$$

2. Hay $\binom{39}{2}$ manos con el macho. La probabilidad es

$$\frac{\binom{39}{2}}{\binom{40}{3}} = \frac{39!\,3!\,37!}{2!\,37!\,40!} = \frac{3}{40} = 0,075 \qquad (7,5\,\%)$$

3. Necesitamos contar cuántas manos hay con el macho y un 3. Este problema lo podemos abordar de dos maneras distintas:

Ejemplo (cont.)

- A la cantidad total de manos con el macho le restamos la cantidad de manos con el macho y ningún 3:

$$\binom{39}{2} - \binom{35}{2} = \frac{39!}{2!\,37!} - \frac{35!}{2!\,33!} = \frac{39 \cdot 38 - 35 \cdot 34}{2} = 146$$

- Sumamos la cantidad de manos con el macho y exactamente un 3 y la cantidad de manos con el macho y dos 3s:

$$1 \cdot 4 \cdot 35 + \binom{4}{2} = 140 + 6 = 146$$

La probabilidad será

$$\frac{146}{\binom{40}{3}} = \frac{146 \cdot 6}{40 \cdot 39 \cdot 38} \approx 0,014 \qquad (1,4\,\%)$$

Paradoja de la fecha de cumpleaños

Problema 1

Dado un grupo de n personas, al cual pertenezco, ¿cuál es la probabilidad de que alguien del grupo cumpla años en mismo día que yo?

Casos posibles: cada persona del grupo (excepto yo) tiene 365 posibilidades para su fecha de nacimiento, luego la cantidad total de configuraciones es 365^{n-1}

Casos favorables: es más fácil contar las configuraciones en las que nadie más en el grupo cumple años el mismo día que yo, es decir, 364^{n-1}, luego los casos favorables serán $365^{n-1} - 364^{n-1}$

La probabilidad p_n de que alguien del grupo cumpla años el mismo día que yo es

$$p_n = \frac{365^{n-1} - 364^{n-1}}{365^{n-1}} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$$

n	p_n	
1	0	
2	0,002	
3	0,005	
4	0,008	
5	0,01	1 %
$\vdots$		
23	0,058	
$\vdots$		
57	0,142	14,2 %
$\vdots$		
253	0,499	
254	0,5	50 %
$\vdots$		
1679	0,989	
1680	0,99	99 %

Problema 2

Dado un grupo de n personas, ¿cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día?

- si $n > 365$ la probabilidad es 1 (ppio. de las casillas).
- Supongamos $2 \leq n \leq 365$.
- **Casos posibles:** 365^n
- **Casos desfavorables:** $|A(n, 365)| = \frac{365!}{(365-n)!}$
- **Casos favorables:** $365^n - \frac{365!}{(365-n)!}$
- **Probabilidad:** $p_n = (365^n - \frac{365!}{(365-n)!})/365^n = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$

n	p_n	
2	0,002	
10	0,116	11,6 %
23	0,507	50,7 %
57	0,99	99 %

Teorema (del binomio)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dem. 1 (Prueba por inducción)

Para $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} b + \binom{1}{1} a = a + b = (a+b)^1$$

el teorema vale. Supongamos cierto para n y probemos la igualdad para $n+1$.

Dem. 1 (cont.)

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

Observemos que el primer sumando puede escribirse como

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}.$$

Luego

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

Dem. 1 (cont.)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} \\
&\qquad + \binom{n}{n} a^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\qquad + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad \square
\end{aligned}
$$

Dem. 2 (Prueba combinatoria)

Veamos primero unos casos particulares.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (aa + ab + ba + bb)(a+b) \\
&= aaa + aba + baa + bba + aab + abb + bab + bbb \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= aaaa + abaa + baaa + bbaa + aaba + abba + baba \\
&\qquad + bbba + aaab + abab + baab + bbab + aabb \\
&\qquad\qquad + abbb + babb + bbbb \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

Dem. 2 (cont.)

En general, tendremos que

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ veces}} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k b^{n-k},$$

en donde c_k es la **cantidad de sumandos en los cuales aparece** k **veces** a **y** $n-k$ **veces** b. Para calcular c_k, observamos que en una palabra de n letras tenemos que elegir k lugares para ubicar las as (y el nos $n-k$ restantes irán las bs. Luego $c_k = \binom{n}{k}$, como se quería probar. $\square$

Corolario

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Dem.

$$0 = 0^n = (-1+1)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Corolario

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Dem.

Ejercicio. $\square$