Vector aleatorio

1. La distribución de probabilidad conjunta del vector (X, Y) está dada por

$p(x,y) = \dfrac{x+y}{30}$ con x = 0, 1, 2, 3, y = 0, 1, 2.

   a) Determine $P(X \leq 2, Y = 1)$, $P(X > 2, Y \leq 1)$, $P(X - Y > 0)$ y $P(X + Y = 4)$.
   b) Obtenga las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.
   c) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?
   d) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y.
   e) Obtenga las distribuciones condicionales.

2. El ejemplo siguiente ilustra que ρ=0 no implica independencia. Suponiendo que una variable aleatoria bidimensional (X, Y) tiene una distribución conjunta dada por

Y/X	-1	0	1
-1	d	c	d
0	c	0	c
1	d	c	d

donde c > 0, d > 0, 4c + 4d = 1, demuestre que

   a) ρ = 0
   b) X e Y no son independientes.

3. Se debe seleccionar un comité de tres personas elegidas al azar de un grupo constituido por cuatro docentes y cinco estudiantes. Sea X_1: número de docentes en el comité y X_2: número de estudiantes en el comité.

   a) Determine la distribución de probabilidad conjunta de X_1 y X_2.
   b) Determine las distribuciones marginales de X_1 y X_2.
   c) ¿Son X_1 y X_2 independientes?
   d) Calcule $P(X_1 = 1 \mid X_2 \geq 1)$.

4. Sea f la función densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y), dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x-y) & \text{si } 0 < x < 2, \quad -x < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determine el valor de *k*.
   b) Obtenga las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.
   c) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?
   d) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y.

5. Sean T_1 y T_2 las variables aleatorias definidas de la siguiente manera:
T_1: tiempo transcurrido en minutos entre la llegada de un cliente al banco y su salida de la ventanilla de servicio;
T_2: tiempo en minutos que el cliente espera en la cola hasta llegar a la ventanilla de servicio.
Se supone que el cliente se ubica en la cola apenas llega al banco. La función densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio (T_1, T_2) está dada por

$$f(t_1,t_2) = \begin{cases} e^{-t_1} & \text{si } \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine $P(T_1 < 2, T_2 < 1)$.
b) Obtenga las funciones marginales.
c) Calcule la probabilidad de que un cliente haya esperado en la cola a lo sumo 1 minuto.
d) Si han transcurrido más de 1 minuto entre la llegada del cliente al banco y su entrada a la ventanilla de servicio, calcule la probabilidad de que haya esperado en la cola al menos dos minutos.

6. Un sistema electrónico opera con dos tipos de componentes. Sean T_1 y T_2 las variables aleatorias tiempo de duración (en horas) de las componentes de tipo 1 y 2 respectivamente. La función densidad de probabilidad conjunta del vector (T_1, T_2) es

$$f(t_1,t_2) = \begin{cases} \frac{t_1}{8}\, e^{-\frac{t_1+t_2}{2}} & \text{si} \quad 0 < t_1 \ \text{ y } \ 0 < t_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine $P(T_1 \geq 1, T_2 \geq 1)$.
b) Calcule la probabilidad de que una componente de tipo 2 tenga una duración mayor que 2 horas.

7. Los tiempos T_A y T_B que dos estudiantes A y B demoran en resolver un problema son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}5$ hs. Calcule la probabilidad de que el estudiante A demore a lo sumo una hora y el estudiante B demore como máximo 45 minutos.

8. Se escoge al azar un punto de coordenadas enteras en el triángulo limitado por $y = 0$, $y = x$, $y = 2n - x$.
a) Determine la distribución conjunta de las coordenadas (X, Y)
b) Determine las distribuciones marginales de X e Y.
c) Determine la distribución condicional de X dado Y.

9. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias cuya distribución conjunta es uniforme en el triángulo de vértices (-1,0), (0,1) y (1,0).
a) Encuentre la densidad marginal de X_1 y la densidad marginal de X_2.
b) Halle $Cov(X_1, X_2)$.

Suma de variables aleatorias

10. Un aparato de televisión puede tener dos tipos de roturas: debido a falla de transistores o debido a la falla de condensadores. Ambas fuentes de rotura son independientes. El número de roturas debido a falla de transistores durante los dos primeros años de utilización del aparato es una v.a. que sigue una ley de Poisson con promedio 1. El número de roturas debido a la falla de condensadores, durante el mismo período, sigue una ley de Poisson con promedio 2. Calcule la probabilidad de que en el primer año de utilización del aparato, éste tenga exactamente 2 roturas.

11. Ciertos elementos de un circuito eléctrico se protegen contra el exceso de voltaje por medio de dos relevadores R_1 y R_2 que se ajustan para ser descargados en períodos X_1 y X_2 respectivamente, después que comienza el exceso de voltaje. Estos períodos de descarga varían debido a pequeños factores incontrolables, por lo que se puede suponer que X_1 y X_2 son v.a. normales independientes con tiempos medios de descarga μ_1 = s y μ_2, y varianzas $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0{,}1\ s^2$.
Determine μ_2 de manera tal que la probabilidad de que R_2 sea descargada antes que R_1 sea a lo sumo 0,001.

12. Sean X_1 y X_2 son v. a independientes con distribución de Poisson y parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Probar que $X_1 + X_2$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

13. Sean $X_1,X_2,\ldots,X_n$, n variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo (0,1). Encuentre la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Z= X_1+X_2+\ldots+X_{60.}$

14. El espesor de una lámina metálica (en mm) es una v.a. $X_i \sim N(0{,}5;\ 0{,}05)$. El espesor de una lámina de papel aislante es también una v.a. $Y_i \sim N(0{,}05;\ 0{,}02)$. Obtenga la distribución del núcleo de un transformador que consta de 50 capas de láminas metálicas y 49 láminas de papel aislante.

15. Un ensamble eléctrico consta de 20 bloques de tipo A y 30 bloques de tipo B conectados longitudinalmente. Los ensambles se colocan en recipientes cuya longitud (en cm) varía aleatoriamente con distribución normal, media 65 y desviación estándar 0,5. Se conoce además que la longitud (en cm) de un bloque de tipo A varía aleatoriamente con media 1,95 y desvío estándar 0,01 y la longitud (en cm) de un bloque de tipo B varía aleatoriamente con media 0,83 y desviación estándar 0,02 cm. Calcule la probabilidad de que un ensamble entre en un recipiente, cuando ambos son elegidos al azar.

16. Un sistema está formado por 100 componentes que funcionan independientemente. La probabilidad de que cualquier componente falle durante el período de operación es igual a 0,10. Para que funcione el sistema completo, deben funcionar al menos 85 componentes. Calcule la probabilidad de que el sistema funcione.

17. El consumo de combustible en litros de un ómnibus que realiza el trayecto Rosario-Santa Fe es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 20 litros y desviación estándar 2 litros. Calcule la probabilidad de que 640 litros resulten insuficientes para realizar 30 viajes.

18. Un sistema está formado por n componentes, cada una con una probabilidad de que funcione de 0,9 El sistema funcionará si funcionan correctamente al menos el 82% de las componentes. Determine n de modo que el sistema tenga una probabilidad de funcionar de al menos 0,95.

19. Treinta instrumentos electrónicos $d_1, d_2, \ldots, d_{30}$ se usan para un control automático de la siguiente manera: cuando falla d_1 comienza a actuar d_2, cuando falla d_2 empieza d_3, y así sucesivamente. El tiempo para que falle d_i ($i = 1, 2, \ldots, d_{30}$) es una v.a. que se distribuye según una ley exponencial con parámetro $\alpha = 0{,}1$ ($hora^{-1}$). Si se quiere obtener la distribución de T,el tiempo total de la operación de los 30 instrumentos, ¿se podría recurrir al Teorema central del límite?

20. Una empresa dedicada a la venta de repuestos sabe que la demanda diaria varía aleatoriamente con la siguiente distribución de probabilidad

D	0	1	2
P(D=d)	0,25	0,5	0,25

Desde el momento en que se hace el pedido hasta que el mismo ingresa al stock transcurren 90 días. Determine cuántas unidades deben tenerse en existencia en momento de hacer el pedido si se quiere que la probabilidad de que la demanda durante los 90 días supere la existencia sea 0,05.

21. La demanda diaria de agua potable por habitante en una población de 10000 habitantes es una v.a. X con $E(X) = 0{,}4\ m^3$ y $\sigma(X) = 0{,}09\ m^3$. La disponibilidad de agua (en m^3) para el consumo almacenado diariamente en una represa es una v.a. $Y \sim N(4500; 450)$.
¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera no sea satisfecha la demanda?