Unidad 5 (complemento)

Sistemas de ecuaciones lineales.

Álgebra y Geometría Analítica II (LCC) – Año 2016

Resumen

En estas páginas se desarrollan aquellos contenidos de la Unidad 5 del Programa que no están cubiertos por las Secciones 1 y 2 del Capítulo 1 del libro [1] (páginas 1 a 30 del libro).

1. Introducción.

Comenzamos recordando algunos conceptos y propiedades ya vistos en clase y que nos serán de utilidad para el desarrollo de los temas que siguen, los cuales complementan la Unidad 5.

1.1. Notación matricial de un sistema lineal.

Sea $S)$ un sistema de m ecuaciones lineales con n variables (o incógnitas)

$$S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right. \tag{1}$$

o sea, un sistema **de tamaño** $m \times n$. Llamaremos: **matriz de los coeficientes** a la matriz A, de tamaño $m \times n$, constituida por los coeficientes de las variables de $S)$; **vector de las variables** al vector columna $\mathbf{x}$, de tamaño n, formado por las incógnitas; y **vector de las constantes** al vector columna $\mathbf{b}$, de tamaño m, con los términos constantes (o términos independientes) del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

También consideraremos la **matriz aumentada** (o **ampliada**), que es la matriz $A' := (A \mid \mathbf{b})$, de tamaño $m \times (n+1)$, que se obtiene de agregarle a la matriz A la columna $\mathbf{b}$:

$$A' = (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \tag{3}$$

Podemos expresar el sistema (1) en **forma matricial**:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{4}$$

como se puede comprobar efectuando el producto de las matrices del primer miembro y aplicando luego la definición de igualdad de matrices.

1.2. Sistemas equivalentes.

Definición 1.1 (Sistemas equivalentes) *Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** si ambos tienen las mismas variables y las mismas soluciones.*

Ejemplo 1.1 *Los siguientes sistemas:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} -7x+9y &=& 11 \\ 3x-2y &=& -1 \\ -x+5y &=& 9, \end{array}\right. \qquad y \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x+4y &=& 9 \\ x+\frac{1}{2}y &=& 2, \end{array}\right.$$

son equivalentes: ambos tienen la misma (y única) solución $x=1, y=2$.

Proposición 1.1 *La relación de equivalencia para sistemas es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Prueba. Se deja como ejercicio. ∎

Dado el sistema (1), si para cada $i=1,\dots,m$ llamamos L_i al primer miembro de su i-ésima ecuación: $L_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$, entonces podemos escribir S) más brevemente así:

$$S) \quad \left\{\begin{array}{ccc} L_1 &=& b_1 \\ L_2 &=& b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_m &=& b_m. \end{array}\right. \tag{5}$$

Como veremos en el siguiente Teorema, las **operaciones elementales** entre las ecuaciones de un sistema (ver [1], pág. 7), no alteran la solución de éste.

Teorema 1.1 (Teorema fundamental de equivalencia de sistemas) *Dado un sistema de ecuaciones lineales, al realizar cualquier operación elemental entre sus ecuaciones, obtenemos un sistema equivalente.*

Prueba.

1. Lo afirmado es obvio si la operación elemental es de **intercambio**.
2. Consideremos ahora una operación elemental de **escalamiento**. Sea S) el sistema de partida y S') el obtenido de reemplazar la i-ésima ecuación de S) por un múltiplo $c \neq 0$ de ella:

$$S) \quad \left\{\begin{array}{ccc} L_1 &=& b_1 \\ \vdots && \\ L_i &=& b_i \\ \vdots && \\ L_m &=& b_m. \end{array}\right. \qquad \longrightarrow \qquad S') \quad \left\{\begin{array}{ccc} L_1 &=& b_1 \\ \vdots && \\ cL_i &=& cb_i \\ \vdots && \\ L_m &=& b_m. \end{array}\right.$$

   - <u>Toda solución de S) lo es de S')</u>. Sea $\mathbf{x}^p := (\, x_1^p \;\; \cdots \;\; x_n^p \,)^t$ una solución (particular) de S).[1] Para ver que $\mathbf{x}^p$ es solución de S') sólo hay que controlar que $\mathbf{x}^p$ verifica la i-ésima ecuación de S'), pues las restantes son las mismas que están en S). Como $a_{i1}x_1^p + \cdots + a_{in}x_n^p = b_i$ (por verificar $\mathbf{x}^p$ la ecuación $L_i = b_i$), multiplicando ambos miembros por $c \in \mathbb{R}$ resulta $(ca_{i1})\,x_1^p + \cdots + (ca_{in})\,x_n^p = cb_i$, y por lo tanto $\mathbf{x}^p$ verifica la ecuación $cL_i = cb_i$.

[1] En los símbolos $\mathbf{x}^p, x_i^p$, etc., la letra p (de *particular*) no es un exponente, sino un *supraíndice* (el elemento compositivo *supra* significa 'arriba' o 'encima de').

- Toda solución de $S')$ lo es de $S)$. Sea ahora $\mathbf{x}^p$ una solución de $S')$. Para ver que $\mathbf{x}^p$ es solución de $S)$ sólo hay que controlar que $\mathbf{x}^p$ verifica la i-ésima ecuación de $S)$, pues las restantes son las mismas que están en $S')$. Como $(ca_{i1})\,x_1^p + \cdots + (ca_{in})\,x_n^p = cb_i$ (por verificar $\mathbf{x}^p$ la ecuación $cL_i = cb_i$), multiplicando ambos miembros por c^{-1} (que existe por ser $c \neq 0$) resulta $a_{i1}x_1^p + \cdots + a_{in}x_n^p = b_i$, es decir, $\mathbf{x}^p$ verifica la ecuación $L_i = b_i$.

3. Consideremos, por último, una operación elemental de **eliminación**. Sea $S)$ el sistema de partida y $S')$ el obtenido de reemplazar la i-ésima ecuación de $S)$ por la suma de ella más la j-ésima ecuación de $S)$ multiplicada por una constante $c \in \mathbb{R}$:

$$S) \quad \begin{cases} L_1 &= b_1 \\ \vdots & \\ L_i &= b_i \\ \vdots & \\ L_j &= b_j \\ \vdots & \\ L_m &= b_m. \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad S') \quad \begin{cases} L_1 &= b_1 \\ \vdots & \\ L_i + cL_j &= b_i + cb_j \\ \vdots & \\ L_j &= b_j \\ \vdots & \\ L_m &= b_m. \end{cases}$$

- Toda solución de $S)$ lo es de $S')$. Sea $\mathbf{x}^p$ una solución de $S)$. Como $a_{i1}x_1^p + \cdots + a_{in}x_n^p = b_i$ y $a_{j1}x_1^p + \cdots + a_{jn}x_n^p = b_j$ (por verificar $\mathbf{x}^p$ las ecuaciones $L_i = b_i$ y $L_j = b_j$), multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por c resulta $(ca_{j1})\,x_1^p + \cdots + (ca_{jn})\,x_n^p = cb_j$, y sumando miembro a miembro ambas igualdades resulta $(a_{i1} + ca_{j1})\,x_1^p + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\,x_n^p = b_i + cb_j$, es decir, $\mathbf{x}^p$ verifica la ecuación $L_i + cL_j = b_i + cb_j$, que es la i-ésima ecuación de $S')$. Como ésta es la única ecuación de $S')$ distinta de las de $S)$, tenemos que $\mathbf{x}^p$ es solución de $S')$.
- Toda solución de $S')$ lo es de $S)$. Sea $\mathbf{x}^p$ una solución de $S')$. Como:

$$(a_{i1} + ca_{j1})\,x_1^p + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\,x_n^p = b_i + cb_j$$

  (por verificar $\mathbf{x}^p$ la ecuación $L_i + cL_j = b_i + cb_j$), distribuyendo y transponiendo términos obtenemos que $a_{i1}x_1^p + \cdots + a_{in}x_n^p + (ca_{j1}x_1^p + \cdots + ca_{jn}x_n^p) = b_i + cb_j$. Como $a_{j1}x_1^p + \cdots + a_{jn}x_n^p = b_j$, por verificar $\mathbf{x}^p$ la j-ésima ecuación de $S')$, multiplicando ambos miembros por c resulta que $ca_{j1}x_1^p + \cdots + ca_{jn}x_n^p = cb_j$. Reemplazando queda $a_{i1}x_1^p + \cdots + a_{in}x_n^p + cb_j = b_i + cb_j$, y cancelando cb_j resulta $a_{i1}x_1^p + \cdots + a_{in}x_n^p = b_i$, y así es que $\mathbf{x}^p$ verifica la i-ésima ecuación de $S) : L_i = b_i$, que es la única ecuación de $S)$ diferente de las de $S')$. Luego, $\mathbf{x}^p$ es solución de $S)$.

El Teorema está completamente demostrado. ∎

1.3. Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones.

Sabemos (ver [1], pág. 20) que en toda forma de renglón escalón E de una matriz A, los pivotes se encuentran en las mismas filas y columnas. De este hecho resulta que las posiciones pivotes de A son fijas y, en particular, es fija la **cantidad de columnas pivotes**. Esta propiedad permite dar la definición de **rango** de una matriz.[2]

[2] Se dice que el rango de una matriz es un "invariante" de la matriz por operaciones elementales.

Definición 1.2 *Dada una matriz A de tamaño $m \times n$ llamaremos* ***rango (o característica)*** *de A, y lo simbolizaremos* $\mathrm{rg}\,(A)$*, al número de columnas pivote de cualquier forma de renglón escalón E de A (o equivalentemente: al número de filas no nulas de E).*

Si la matriz A es de tamaño $m \times n$, se desprende de la definición que $\mathrm{rg}\,(A) \leq m$ y $\mathrm{rg}\,(A) \leq n$, es decir que $\mathrm{rg}\,(A) \leq \min\{m, n\}$.

Consideremos ahora el sistema (1) y sean: A su matriz de coeficientes, $A' = (A \mid \mathbf{b})$ su matriz aumentada y E' una forma de renglón escalón de A'. Sabemos (ver [1], Teorema 2, pág. 23) que:

1. Si la última fila no nula de E' es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \mid & c \end{pmatrix}, \qquad \text{con } c \neq 0 \text{ y situado en la columna } n+1,$$

   entonces el sistema es **incompatible** (o **inconsistente**), es decir: no tiene solución (vale también la recíproca). Observemos que este caso se da si, y sólo si $\mathrm{rg}\,(A \mid \mathbf{b}) > \mathrm{rg}\,(A)$.
   Luego: (1) es incompatible si, y sólo si $\mathrm{rg}\,(A \mid \mathbf{b}) > \mathrm{rg}\,(A)$.

2. Si, en cambio, la última fila no nula de E' es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c & * & \mid & * \end{pmatrix}, \qquad \text{con } c \neq 0 \text{ y situado en cualquier columna } j \text{ de } E$$

   (y por lo tanto es $1 \leq j \leq n$), entonces el sistema es **compatible** (o **consistente**), es decir: admite solución (vale también la recíproca). Este caso se da si, y sólo si $\mathrm{rg}\,(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rg}\,(A)$, valor que simbolizamos r y lo llamaremos **rango del sistema**.
   Luego: (1) es compatible si, y sólo si $\mathrm{rg}\,(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rg}\,(A)$.
   Si (1) es compatible de rango r, entonces pueden presentarse estas dos situaciones:

   a) que sea $r = n$, en cuyo caso el sistema es **determinado** (hay solución única); y
   b) que sea $r < n$, en cuyo caso el sistema es **indeterminado** (hay infinitas soluciones).

El Teorema de Rouché-Frobenius sintetiza las conclusiones precedentes y caracteriza el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Teorema 1.2 (Rouché-Frobenius) *Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, el mismo admite solución si, y sólo si* $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A \mid \mathbf{b})$*. En tal caso, llamando r a dicho valor (rango del sistema), la solución es única si $r = n$ y hay infinitas soluciones si $r < n$.*

1.4. Resolución simultánea de sistemas lineales.

Definición 1.3 *Dos o más sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones y de variables se dicen* ***simultáneos*** *si todos ellos tienen la misma matriz de coeficientes.*

Dados N sistemas simultáneos:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \qquad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \qquad \ldots, \qquad A\mathbf{x}_N = \mathbf{b}_N,$$

éstos pueden resolverse "simultáneamente" considerando la "matriz aumentada" del conjunto de todos ellos, esto es, la siguiente matriz:

$$A' := (A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{b}_N),$$

que es la que se obtiene de agregarle a la matriz de coeficientes común A, las columnas formadas por los términos constantes $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_N$ de cada sistema.

Llevando A' a una forma de renglón escalón (por aplicación del Algoritmo 1 de eliminación de Gauss, en [1], pág. 18) obtendremos la matriz:

$$E' := (E \mid \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{c}_N)\,,$$

pudiendo resolverse por **sustitución hacia atrás** a cada uno de los N sistemas equivalentes:

$$E\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}_1, \qquad E\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}_2, \qquad \ldots, \qquad E\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_N,$$

y encontrando así la solución de cada uno de los N sistemas de partida.

La "simultaneidad" de los sistemas originales permite que, aplicando **sólo una vez** el algoritmo de eliminación de Gauss, podamos resolver **todos** los sistemas "al mismo tiempo".

En la próxima Sección §2.2 (en pág. 8) veremos una aplicación de la resolución simultánea de sistemas y en el próximo Ejemplo 2.2 (en pág. 9) se resuelven dos sistemas simultáneos.

2. Sistemas Cuadrados.

Consideremos a continuación un sistema $S)$ **cuadrado**, es decir, con igual número de ecuaciones que de incógnitas ($m = n$). En este caso la matriz de coeficientes A será cuadrada de tamaño $n \times n$ y su matriz aumentada A' será de tamaño $n \times (n+1)$. Si $S)$ es un sistema cuadrado con n ecuaciones y n incógnitas, diremos que $S)$ es un **sistema de tamaño** n.

Lema 2.1 *Si $S)$ es un sistema cuadrado, A es su matriz de coeficientes y E es una forma de renglón escalón de A, entonces:* $\det E \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Prueba. Por el algoritmo de eliminación de Gauss sabemos que para pasar de A a E es suficiente con las siguientes operaciones elementales de filas: **eliminación** y/o **intercambio** (es decir, no es necesario el **escalamiento**). A su vez, por la Proposición 2.24 y el Ejercicio 2.25 de la guía de *Matrices y determinantes* [2] (en la pág. 20 de dicha guía), sabemos que la operación de eliminación no cambia el determinante, y por el Corolario 2.22 y el Ejercicio 2.23 (en las págs. 19 y 20 de la misma guía) sabemos que cada intercambio de filas cambia el signo del determinante, de modo que entre los determinantes de A y E existe la siguiente relación:

$$\det E = \pm \det A, \qquad \text{o más precisamente,} \qquad \det E = (-1)^k \det A,$$

donde k es el número de intercambios de filas que fueron necesarios para llegar de A a E.

Entonces claramente $\det E = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, o equivalentemente: $\det E \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$, lo que completa la demostración del Lema. ■

2.1. La regla de Cramer.

Teorema 2.1 (Teorema de Cramer) *Si $S)$ es un sistema cuadrado y A es su matriz de coeficientes, entonces $S)$ es compatible determinado si, y sólo si* $\det A \neq 0$.

Prueba. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la notación matricial de $S)$, sea $E' = (E \mid \mathbf{c})$ una forma de renglón escalón de la matriz aumentada $A' = (A \mid \mathbf{b})$ de $S)$, y sea $S')$ el sistema $E\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Por el Teorema 1.1 sabemos que $S)$ y $S')$ son **equivalentes** (es decir: tienen las mismas soluciones). Luego: $S)$ es compatible determinado si, y sólo si $S')$ es compatible determinado. A su vez, por el Teorema de Unicidad de soluciones (Teorema 3 de [1], en pág. 24), esto último sucede si, y sólo si cada columna de E es de pivote (y la última columna de E' no lo es). Siendo E una matriz cuadrada, esto equivale a que cada una de las posiciones e_{ii} de su diagonal principal sea de pivoteo (ver

[1], pág. 20). Y como, por definición, un pivote es no nulo, y debajo de él todos los elementos son ceros, E resulta ser una matriz triangular (superior) y por lo tanto su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal (ver [2], Proposición 2.27, en pág. 21). Por lo tanto es $\det E = e_{11}e_{22}\cdots e_{nn} \neq 0$. Y como por el Lema 2.1 es $\det E \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$, el Teorema está probado. ■

Corolario 2.1 *Para todo sistema cuadrado compatible determinado con notación matricial* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, se verifica que:*

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Prueba. Como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema cuadrado compatible determinado, por el Teorema de Cramer sabemos que $\det A \neq 0$ y por lo tanto la matriz A es invertible (Corolario 2.31, en pág. 22 de [2]). Pre-multiplicando por A^{-1} ambos miembros[3] de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ podemos "despejar" $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \quad I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

resultando así la tesis. ■

Teorema 2.2 (Regla de Cramer) *Si A es la matriz de los coeficientes de un sistema cuadrado compatible determinado de tamaño n, y para cada $j = 1, \ldots, n$ es A_j^* la matriz que se obtiene de sustituir la columna j de A por la columna de los términos constantes, entonces:*

$$x_j = \frac{\det(A_j^*)}{\det A}.$$

Observaciones previas.

- Recordemos que dada una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ simbolizábamos:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

a la j-ésima columna de A, con $j = 1, \ldots, n$ (ver [2], pág. 17, *Notación*), y consecuentemente podemos expresar A como una matriz de **vectores columna**:

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$

- Si el sistema cuadrado compatible determinado del enunciado es, en notación matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces las matrices A y A_j^* resultan ser las matrices con los siguientes vectores columna:[4]

$$\begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{j-1} & C_j & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}, \\ A_j^* & = & \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{j-1} & \mathbf{b} & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Prueba. (de la Regla de Cramer) Por el Corolario 2.1 sabemos que

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \tag{6}$$

[3] Es decir: multiplicando por A^{-1} "a la izquierda" en ambos miembros.

[4] Si $j = 1$ entonces $\mathbf{b}$ está en la primera columna de la matriz A_j^* (que, como $j = 1$, sería A_1^*), y si $j = n$ entonces $\mathbf{b}$ está en la última columna de la matriz A_j^* (que, como $j = n$, sería A_n^*).

donde (ver [2], pág. 26, Corolario 2.42):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A = \frac{1}{\det A}\left((\text{adj } A)_{ij}\right) = \left(\frac{(\text{adj } A)_{ij}}{\det A}\right).$$

Aplicando en (6) la definición de producto e igualdad de matrices, para todo $j = 1, \ldots, n$:

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\text{adj } A)_{jk}}{\det A} \cdot b_k = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} (\text{adj } A)_{jk} \cdot b_k,$$

y como (ver [2], pág. 25, Definición 2.40): $(\text{adj } A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{j+i} \det A(j|i)$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$; resulta que:

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \det A(k|j) \cdot b_k.$$

De la definición de la matriz A_j^* surge claramente que $A(k|j) = A_j^*(k|j)$ para todo $k, j = 1, \ldots, n$, de donde, reemplazando, resulta:

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \det A_j^*(k|j) \cdot b_k = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} b_k \det A_j^*(k|j) = \frac{1}{\det A}\det (A_j^*),$$

valiendo, la última igualdad, por el desarrollo del determinante de A_j^* por los elementos de su j-ésima columna (ver [2], pág. 25, Corolario 2.38). El Teorema está demostrado. ■

Ejemplo 2.1 *1. Verificar que el siguiente sistema cuadrado de tamaño* 2 *es determinado:*

$$S) \quad \left\{\begin{array}{rcr} 3x - 2y & = & -1 \\ -x + 5y & = & 9 \end{array}\right.$$

2. Resolver $S)$ *aplicando la regla de Cramer.*

Solución.

- Dado que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13 \neq 0,$$

  resulta, por el Teorema de Cramer, que el $S)$ es compatible determinado.

- Y por la regla de Cramer tenemos que:

$$\begin{aligned} x \quad &=: \quad x_1 = \frac{\det (A_1^*)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-5+18}{13} = 1, \\ y \quad &=: \quad x_2 = \frac{\det (A_2^*)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}}{13} = \frac{27-1}{13} = 2. \end{aligned}$$

2.2. Cálculo alternativo de la inversa de una matriz cuadrada.

Dada una matriz cuadrada A, el procedimiento descrito en §1.4 para resolver sistemas simultáneos, puede aplicarse, como veremos, tanto para determinar si A es invertible; como asimismo para obtener, en caso que sea invertible, la matriz A^{-1} (la inversa de A).

Más aún, la aplicación del procedimiento que a continuación describiremos, constituye una manera más práctica y eficiente para ambos fines: para determinar si A es invertible, es preferible al Corolario 2.31 (en la pág. 22 de [2]), que requiere el cálculo del determinante de A; y para obtener A^{-1} (en caso que exista), es preferible al Corolario 2.42 (en la pág. 26 de [2]), que requiere el cálculo del determinante de A y de la matriz adjunta de A (ver también los Ejemplos 2.44 y 2.45, en págs. 26-27 de [2], que hacen uso de dichos Corolarios).

Para explicar el procedimiento en cuestión, consideremos una matriz A de tamaño $n \times n$ y supongamos que A^{-1} existe y que desconocemos sus $n \times n$ elementos (incógnitas):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por definición de matriz inversa, sabemos que se debe verificar la siguiente condición:

$$A\,A^{-1} = I_n,$$

la cual es una identidad matricial tal, que si expresamos A^{-1} e I_n como matrices de **vectores columna**, es equivalente a esta otra:

$$A\,(\,A_1^{-1} \quad \cdots \quad A_n^{-1}\,) = (\,\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n\,)\,, \tag{7}$$

donde $A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1}$ representan las columnas de la matriz A^{-1} y $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ representan las columnas de I_n (es decir que $\mathbf{e}_i$ es un vector columna formado por ceros, excepto en la fila i, en el cual hay un uno, para todo $i = 1, \ldots, n$).

Por definición de producto de matrices (pensando a cada columna de A^{-1} como un vector columna), puede probarse (**se deja como ejercicio**), que:

$$A\,(\,A_1^{-1} \quad \cdots \quad A_n^{-1}\,) = (\,A\,A_1^{-1} \quad \cdots \quad A\,A_n^{-1}\,)\,. \tag{8}$$

Igualando a continuación las columnas de las matrices de los segundos miembros de las igualdades (7) y (8) tenemos que:

$$A\,A^{-1} = I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, n: \quad A\,A_j^{-1} = \mathbf{e}_j.$$

Pero resulta que cada igualdad matricial:

$$A\,A_j^{-1} = \mathbf{e}_j,$$

no es más que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, en el cual: las incógnitas son los elementos de la columna j de A^{-1} y los términos constantes son la columna j de I_n.

Aparece así el siguiente conjunto de n sistemas simultáneos (uno para cada valor de j):

$$A\,A_1^{-1} = \mathbf{e}_1, \qquad A\,A_2^{-1} = \mathbf{e}_2, \qquad \ldots, \qquad A\,A_n^{-1} = \mathbf{e}_n,$$

los cuales, como tales, pueden resolverse "simultáneamente" como se explicó en la Sección §1.4 (luego de la Definición 1.3).

Si hacemos dicha resolución a través del algoritmo de eliminación de Gauss, hasta obtener la forma de escalón **reducida** de la matriz aumentada del conjunto de los n sistemas, y los n sistemas son compatibles, entonces directamente habremos obtenido A^{-1}, como veremos en el siguiente ejemplo. El proceso puede esquematizarse así: $(A \mid I) \to \cdots (\text{Gauss}) \cdots \to (I \mid A^{-1})$.

Además, si alguno de los sistemas no es compatible determinado, entonces A no es invertible.

Ejemplo 2.2 *Hallar, si existe, la matriz inversa de:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Llamando x, y, z y w (incógnitas) a los elementos de A^{-1},

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

a éstos podemos obtenerlos, de acuerdo a los visto anteriormente, resolviendo los siguientes sistemas simultáneos:

$$S_1) \quad \begin{cases} 2x + z &= 1 \\ -x + 3z &= 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad S_2) \quad \begin{cases} 2y + w &= 0 \\ -y + 3w &= 1. \end{cases}$$

la matriz aumentada de ambos sistemas es la siguiente:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de modo que la resolución simultánea de $S_1)$ y $S_2)$ podemos llevarla a cabo a través del algoritmo de eliminación de Gauss aplicado a A', hasta llegar a **su** (única) forma de renglón escalón **reducida**:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \frac{1}{2}\mathtt{f}_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + \mathtt{f}_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \frac{2}{7}\mathtt{f}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - \frac{1}{2}\mathtt{f}_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right),$$

resultando así los siguientes sistemas $S_1)^*$ y $S_2)^*$, equivalentes a $S_1)$ y $S_2)$ respectivamente:

$$S_1)^* \quad \begin{cases} x & = \frac{3}{7} \\ \quad z & = \frac{1}{7} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad S_2)^* \quad \begin{cases} y & = -\frac{1}{7} \\ \quad w & = \frac{2}{7}, \end{cases} \tag{9}$$

de modo que si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Nota 2.1 *En la práctica, para hallar la inversa de la matriz A del ejemplo anterior, podemos aplicar directamente el proceso esquematizado: $(A \mid I) \to \cdots (\text{Gauss}) \cdots \to (I \mid A^{-1})$, sin plantear explícitamente los sistemas equivalentes (9). Sería del siguiente modo:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \frac{1}{2}\mathtt{f}_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + \mathtt{f}_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \frac{2}{7}\mathtt{f}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - \frac{1}{2}\mathtt{f}_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right), \textit{concluyendo que } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Para completar esta Sección 2.2, se recomienda leer las págs. 174-175 del libro [1] (el Ejemplo 20 y el Algoritmo 1 para invertir una matriz).

Referencias

[1] Nakos, G. y Joyner, D. *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Thompson International, 1999.

[2] Reggiani, Silvio. *Matrices y Determinantes*. Facultad de Ciencas Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR, 2015.

Índice