Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Álgebra y Geometría Analítica II (2016)

Divisibilidad

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar las siguientes afirmaciones.
   a) Para todo a, $a \mid 0$. En particular, $0 \mid 0$.
   b) Para todo $a \neq 0$, $0 \nmid a$.
   c) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ o $a = b = -1$.
   d) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = \pm b$.
   e) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b + c)$ y $a \mid (b - c)$.
   f) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.
   g) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a \mid bc$.
2. Probar las siguientes propiedades.
   a) 0 es par.
   b) 1 es impar.
   c) Si a es par y $a \mid b$, entonces b es par. Por tanto, si a es par, entonces $-a$ también lo es.
   d) La suma de dos números pares es par. Por lo tanto, la suma de una cantidad cualquiera de números pares es un número par.
   e) La suma de dos números impares es impar.
   f) La suma de un número par y un número impar es impar.
3. Sea $n \in \mathbb{Z}$.
   a) Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.
   b) Probar que $n(n + 1)$ es par.
4. —Pensá un número de dos cifras, que no sean iguales.
   —Ya está (57).
   —Invertí el orden de las cifras.
   —Ya está (75).
   —El nuevo número, ¿es mayor o menor que el primero?
   —Mayor.
   —Entonces restá al nuevo número el que pensaste primero.
   —Ya está ($75 - 57 = 18$).
   —Ahora sumá las cifras del número que obtuviste al principio.

—Ya está $(5+7=12)$.

—Decime los dos números que obtuviste.

—18 el primero y 12 el segundo.

—(Calcula: $18/9=2$, $(12-2)/2=5$, $(12+2)/2=7$.) Pensaste en el 57.

Explicar cómo es el truco y por qué siempre funciona.

5. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

   a) $2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$ es divisible por 11;

   b) $3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}$ es múltiplo de 17;

   c) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

6. Hallar el cociente y el resto de la división de:

   i) 135 por 23, ii) -135 por 23, iii) 135 por -23,
   iv) -135 por -23, v) -98 por 73, vi) -98 por -73.

7. *a*) Si $a = b \cdot q + r$ con $b \leq r < 2b$, ¿cuáles son el cociente y el resto de la división de a por b?

   b) Repetir el ítem anterior suponiendo que $-b \leq r < 0$.

8. Expresar 1810, 1816 y 1972 en bases $b = 3, 5, 7, 11$.

9. Expresar en base 10 los siguientes enteros.

   i) $(1503)_6$, ii) $(1111)_2$, iii) $(1111)_{12}$, iv) $(123)_4$,
   v) $(12121)_3$, vi) $(1111)_5$, vii) $(\mathrm{A13F})_{16}$, viii) $(\mathrm{A2DFE})_{16}$.

10. Dar todos los números primos positivos menores que 100.

11. Encontrar $\mathrm{mcd}(a, b)$, expresarlo como combinación lineal de a y b y encontrar $\mathrm{mcm}(a, b)$ para

    i) $a = 14$, $b = 35$, ii) $a = 11$, $b = 15$, iii) $a = 12$, $b = 52$
    iv) $a = 12$, $b = -52$, v) $a = 12$, $b = 532$, vi) $a = 606$, $b = 108$.

12. Encontrar $\mathrm{mcd}(7469, 2464)$, $\mathrm{mcd}(2689, 4001)$, $\mathrm{mcd}(2447, -3997)$.

13. Encontrar $\mathrm{mcd}(0, a)$ para un entero $a \neq 0$.

14. Probar que 3 es primo.

15. Probar que no existen enteros a y b tales que $a + b = 100$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 3$.

16. Probar que si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ y $n + 2$ es un número primo, entonces $\mathrm{mcd}(a + b, a^2 + b^2 - nab)$ es 1 o $n + 2$.

17. Probar que $\mathrm{mcd}(a+b, \mathrm{mcm}(a, b)) = \mathrm{mcd}(a, b)$. En particular, si dos números son coprimos, también lo son su suma y su producto.

18. *a*) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

    b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.

19. Demostrar que para todo $n > 2$ existe un primo p tal que $n < p < n!$. *Ayuda*: pensar qué primos dividen a $n! - 1$.

20. Existen enteros m y n tales que:

    i) $m^4 = 27$, ii) $m^2 = 12n^2$, iii) $m^3 = 47n^3$?

21. Mostrar que 725 y 441 son coprimos y encontrar enteros m, n tales que $1 = m \cdot 725 + n \cdot 441$.

22. Probar que $\sqrt{6}$ es irracional.

23. Probar que $2^{3n+4} + 7^{3n+1}$ es divisible por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$, n impar.

24. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es múltiplo de 4.