Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Álgebra y Geometría Analítica II (2016)

Permutaciones y determinantes

1. Para cada una de las siguientes permutaciones escribirla como composición de transposiciones y encontrar su inversa y su signo.

   a) $(6,4,5,1,2,3)$ b) $(6,5,4,3,2,1)$ c) $(7,6,5,4,3,2,1)$
   d) $(2,4,1,7,3,5,6)$ e) $(2,3,4,5,6,7,8,1)$ f) $(n,n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$
   g) $(2,3,4,\ldots,n-2,n-1,n,1)$

2. Mostrar que si $\{i,j\}\cap\{k,\ell\}=\varnothing$ entonces $\tau_{i,j}\circ\tau_{k,\ell}=\tau_{k,\ell}\circ\tau_{i,j}$.

3. Encontrar el signo de la siguiente permutación de los días de la semana (suponemos que la semana empieza el domingo):

   `(vie, lun, dom, mié, mar, sáb, jue)`

4. Dada $\sigma\in S_n^j$, encontrar $\sigma^j\in S_{n-1}$.

   a) $\sigma=(1,3,2,6,4,5)\in S_6^1$, b) $\sigma=(3,1,2,5,4,6)\in S_6^3$,
   c) $\sigma=\tau_{1,2}\circ\tau_{3,4}\circ\tau_{5,6}\circ\tau_{7,8}\in S_8^2$, d) $\sigma\in S_n^n$ (arbitraria).

5. Dada $\sigma^j\in S_{n-1}$ encontrar la correspondiente permutación $\sigma\in S_n^j$.

   a) $\sigma^1=(6,5,4,3,2,1)\in S_6$, b) $\sigma^7=(6,5,4,3,2,1)\in S_6$,
   c) $\sigma^3=(6,5,4,3,2,1)\in S_6$, d) $\sigma^5=(7,1,3,2,5,4,6)\in S_7$.

6. Escribir un algoritmo que reciba $\sigma\in S_n$ y devuelva $\sigma^{\sigma(1)}\in S_{n-1}$.

7. *a)* Dada $\sigma\in S_n$, mostrar que existe una matriz $P_\sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}$, cuyas entradas son sólo ceros y unos, y tal que
$$P_\sigma\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma(1)\\\sigma(2)\\\vdots\\\sigma(n)\end{pmatrix}$$

   b) Probar que $P_\sigma\circ P_\mu=P_{\sigma\circ\mu}$ para todas $\sigma,\mu\in S_n$.

   c) Probar que $\det P_\sigma=\operatorname{sg}(\sigma)$ para toda $\sigma\in S_n$.

8. La función *permanente* se aplica a matrices $n \times n$ y se define como

$$\operatorname{perm} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\operatorname{perm} I = 1$.

b) $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} A^t$ para toda $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

c) Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene dos columnas iguales, entonces $\operatorname{perm} A = 0$.

d) $\operatorname{perm}(AB) = (\operatorname{perm} A)(\operatorname{perm} B)$ para todas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.