Análisis Matemático II

Docentes:	Dra. Gabriela Reyero. Dana Pizarro
Asignatura:	R-122 Análisis Matemático II.
Carreras:	Licenciatura en Ciencias de la Computación.
Departamento:	de Ciencias de la Computación.
Escuela:	de Ciencias Exactas y Naturales.
Facultad:	de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Universidad:	Nacional de Rosario.

Contenidos:

- Aplicaciones de la derivada.
- Cálculo integral.
- Cálculo diferencial en campos escalares.
- Cálculo integral en campos escalares.

Unidad 1 – Aplicaciones de la derivada

Extremos de una función.

La derivación se puede utilizar para determinar los *extremos* de una función, es decir los máximos y mínimos.

Definición: Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c, d \in D$ diremos que:

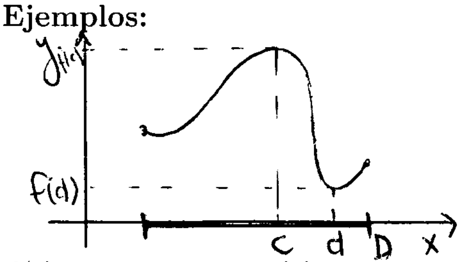
i) $f(c)$ es ***máximo absoluto*** de f en D si $f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D$.

ii) $f(d)$ es ***mínimo absoluto*** de f en D si $f(x) \geq f(d) \quad \forall x \in D$.

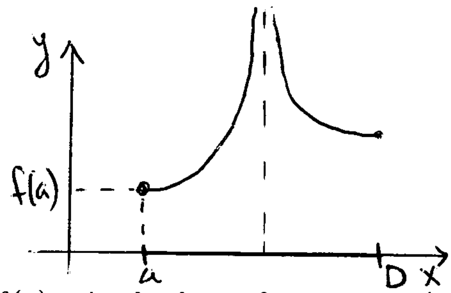
Un número que es un máximo absoluto o un mínimo absoluto de una función f se denomina valor extremo o *extremo* de f.

También se dice que f alcanza su máximo absoluto en c si $f(c)$ es un máximo absoluto o que f alcanza su mínimo absoluto en d si $f(d)$ es un mínimo absoluto

Ejemplos:



$f(c)$ máx absoluto, $f(d)$ mín absoluto



$f(a)$ mín absoluto, f no tiene máx absoluto.

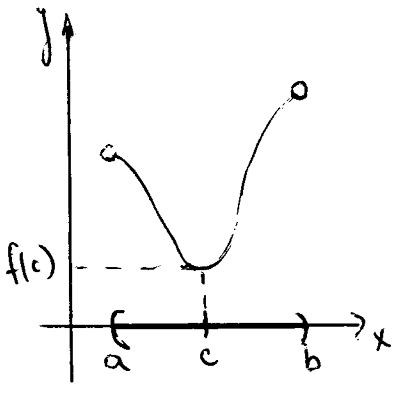
Nota: No todas las funciones tienen extremos. Condición suficiente de existencia de extremos.

Teorema de Weierstrass: Sea f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Entonces f alcanza su máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$. Es decir, existen $c \in [a, b]$ y $d \in [a, b]$ tales que $f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in [a, b]$ y $f(d) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

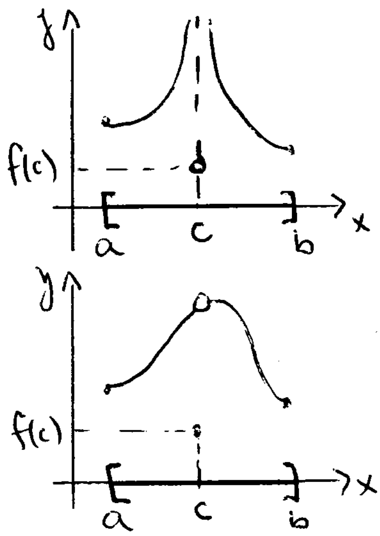
Dem: no la hacemos.

Observación: Las hipótesis f continua y $[a, b]$ cerrado y acotado son imprescindibles.

Ejemplos:

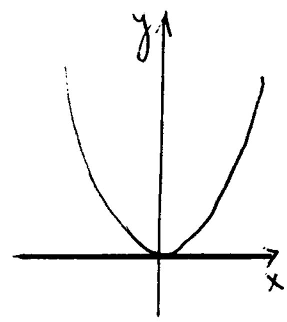


f cont en (a, b) pero
no tiene max (aunque si min)
y es $f(c)$



f no tiene max abs en $[a, b]$

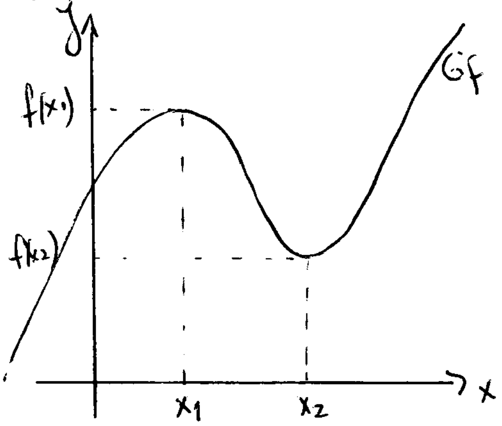
pero $f(c)$ min abs.

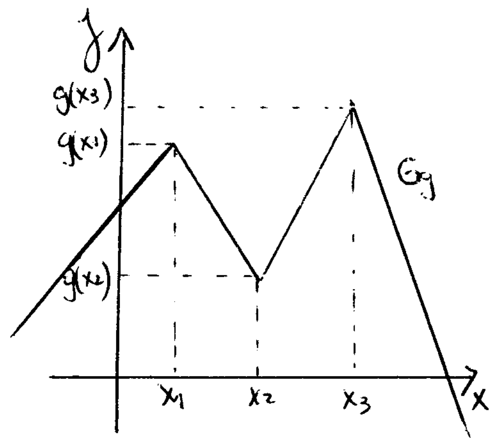


$f(x) = x^2$ es cont
sin embargo
no tiene max abs
si tiene min abs.

Definición: Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c, d \in D$ diremos que:
i) f alcanza un *máximo relativo* en c (o que $f(c)$ es un máximo relativo de f) si existe un entorno de c, $E(c)$ tal que $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in E(c)$.
ii) f alcanza un *mínimo relativo* en d (o que $f(d)$ es un mínimo relativo de f) si existe un entorno de d, $E(d)$ tal que $f(x) \geq f(d)$ $\forall x \in E(d)$.
iii) f tiene un *estremo relativo* en x_0 si tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0.

Observación: Un máximo relativo en c es un máximo absoluto en cierto entorno de c, si bien no necesariamente es absoluto en D y naturalmente todo máximo absoluto es, en particular, máximo relativo. Notaremos MA (máximo absoluto), MR (máximo relativo), ma (mínimo absoluto) y mr (mínimo relativo). También se suele usar el término extremo local en lugar de relativo.
Ejemplos:





$f(x_1)$ es MR y $f(x_2)$ es mr
no tiene MA ni ma

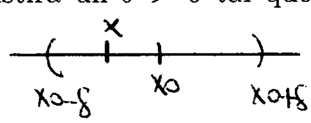
$g(x_1)$ y $g(x_3)$ son MR,
$g(x_2)$ es mr, no tiene ma
$g(x_3)$ es además MA

Veremos una condición necesaria de existencia de extremos para funciones derivables.
Teorema de Fermat: Sea f definida en un entorno de x_0 y supongamos que f tiene en x_0 un extremo relativo. Entonces, si f es derivable en x_0, es $f'(x_0) = 0$.

Dem: Por el absurdo, supongamos que $f'(x_0) \neq 0$. Es decir, $f'(x_0) > 0$ 0 $f'(x_0) < 0$. Supongamos que fuese $f'(x_0) > 0$. Tenemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

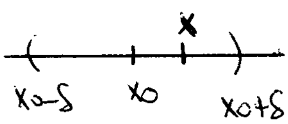
Por el teorema de conservación del signo, existirá un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.



Por lo tanto:

· si $x_0 - \delta < x < x_0$ (o sea x está a la izq de x_0) : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ y $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0)$.

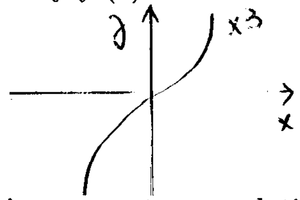
· si $x_0 < x < x_0 + \delta$ (o sea x está a la der de x_0) : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ y $x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0)$.



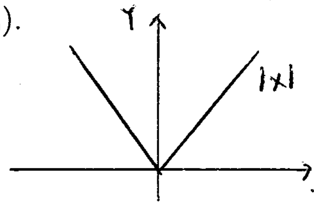
Es decir, f no tendrá un extremo relativo en x_0 Absurdo! por lo tanto no puede ser $f'(x_0) > 0$.
Análogamente, no podrá ser $f'(x_0) < 0$.

$$\therefore \quad f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

Observación: **1)** El teorema dice que si existe $f'(x_0)$ y f tiene un extremo relat en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$. No vale el recíproco, (la condición no es suficiente).
Ejemplo: $f(x) = x^3$, f es derivable y $f'(0) = 0$ sin embargo f no tiene extremo relativo en 0.

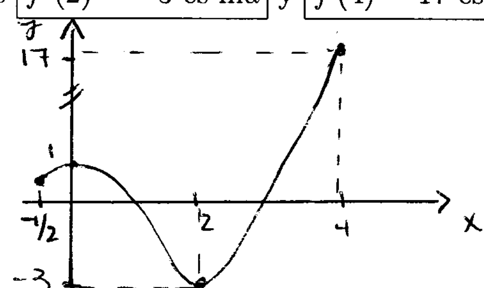


2) El teorema nos dice que si f tiene un extremo relativo en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$ o bien $\nexists\, f'(x_0)$.
Ejemplo: $f(x) = |x|$ tiene un mínimo abs en 0 y $\nexists\, f'(x_0)$.



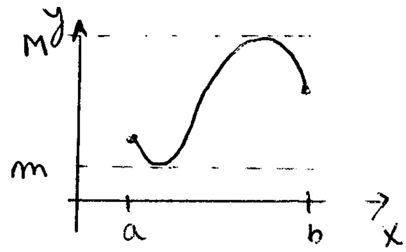
Definición: Decimos que $c \in \operatorname{dom} f$ es un *punto crítico* de f si $f'(c) = 0$ o f no es derivable en c (o sea $\nexists\, f'(c)$.
Observación 1) El teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en c, entonces c es un punto crítico de f. Por lo tanto, para hallar extremos relativos de una función, debemos localizar sus puntos críticos y necesitaremos establecer un criterio para analizar si en ellos hay o no extremos y de que tipo, pues no en todo punto crítico hay extremos, por ej $f(x) = x^3$.
2) El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función continua en $[a, b]$. Estos pueden alcanzarse en a, en b o en puntos interiores del intervalo. Para hallarlos, entonces, deberemos localizar los puntos críticos de f en (a, b) y comparar el valor de f en ellos con $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de todos será el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto.

Ejemplo: Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en $[-\frac{1}{2}, 4]$. f es derivable en $(-\frac{1}{2}, 4)$, por lo tanto no hay puntos críticos donde la derivada no exista. Busquemos en los x tales $f'(x) = 0$, es decir, $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-\frac{1}{2}, 4)$ o $x = 2 \in (-\frac{1}{2}, 4)$. Calculamos f en los extremos del intervalo $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$, $f\,(4) = 17$ y en los puntos críticos $f\,(0) = 1$ y $f\,(2) = -3$ y comparamos todos los valores, entonces $\boxed{f\,(2) = -3 \text{ es ma}}$ y $\boxed{f\,(4) = 17 \text{ es MA}}$. esbozo de la gráfica de f.



Teorema: Sea $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Si $f^{(n)}$ es continua en un entorno $E(x_0)$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ es par} \quad &\Rightarrow \quad f(x_0) \text{ es un extremo} \\ \text{si } n \text{ es impar} \quad &\Rightarrow \quad \text{no hay extremo en } x_0 \end{aligned}$$

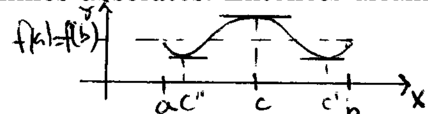


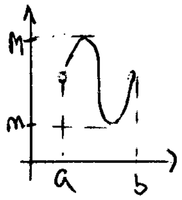
Dem: no la hacemos.
Ejemplo: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$. Completar!

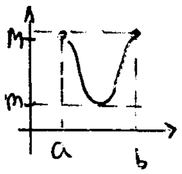
9/3

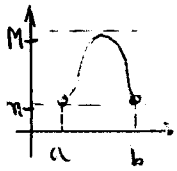
Teoremas de valor medio.

Teorema de los valores intermedios: Sea f definida en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que f es continua en $[a, b]$. Sean M y m sus respectivos máximos y mínimos absolutos. Entonces alcanza todos los valores entre m y M. Es decir, $\operatorname{Im} f = [m, M]$.
Dem: no la hacemos.







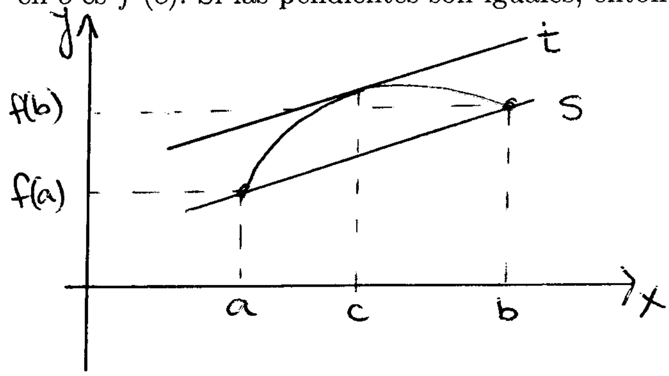


Teorema de Rolle: Sea f definida en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que $f(a) = f(b)$. Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Dem: Por ser f continua en $[a, b]$ el teorema de Weierstrass asegura la existencia de extremos de f en $[a, b]$. Sean M el máximo absoluto de f en $[a, b]$ y m el mínimo absoluto de f en $[a, b]$. Será entonces $m \leq M$. Si fuese $m = M$, resultaría $f(x) = cte = m = M$ en $[a, b]$ y por lo tanto tendríamos $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$. Si $m < M$, por ser $f(a) = f(b)$, al menos uno de los valores entre m y M será asumido en un punto interior $c \in (a, b)$. Por lo tanto, f tendrá un extremo relativo en c y siendo derivable en (a, b), será $f'(c) = 0$. □

Teorema de Lagrange (Teorema del valor medio del cálculo diferencial): Sea f definida en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe (al menos) un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interpretación geométrica La pendiente de la recta secante s es $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, la de la recta tangente t a la gráfica de f en c es $f'(c)$. Si las pendientes son iguales, entonces $s \parallel t$.



Dem: Definimos $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ para $x \in [a, b]$, entonces F verifica:

i) $F(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

Luego

$$F(a) = F(b)$$

ii) F es continua en $[a, b]$ por ser f continua en $[a, b]$ y el álgebra de las funciones continuas.

iii) F es derivable en (a, b) por ser f derivable en (a, b) y el álgebra de las funciones derivables.

Por i, ii y iii F verifica las hipótesis del teorema de Rolle, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$.

Ahora, para cada $x \in (a,b)$ es $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, luego $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, entonces $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Teorema de Cauchy: Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)\,(g(b)-g(a)) = g'(c)\,(f(b)-f(a))$$

Dem: Ejercicio, definir $h(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$ y aplicar el teorema de Rolle a la función h.

Observación: El teorema de Rolle es un caso particular del teorema de Lagrange y éste un caso particular del teorema de Cauchy, cuando $g(x) = x$.

13/3

Propiedades geométricas de las funciones. Criterios para determinar crecimiento, convexidad y extremos.

Teorema (criterio para determinar los intervalos de monotonía de una función): Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

a) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.
b) Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.
c) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ entonces f es constante en $[a,b]$.

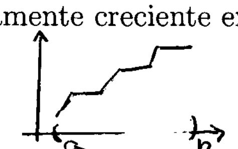
Dem: Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $x_1 < x_2$ por teorema de Lagrange $\exists c \in (x_1,x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

a) Como $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ entonces $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ resulta $f(x_2) > f(x_1)$ y luego f es estrictamente creciente en $[a,b]$.

b) Análogo para $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ resulta $f(x_2) < f(x_1)$.

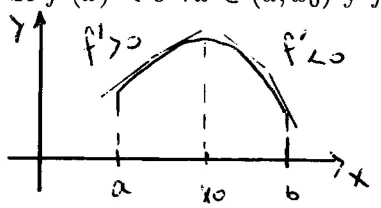
c) Sea ahora $x \in (a,b)$, por teorema de Lagrange existe $c \in (a,x)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Como $f'(x) = 0$ resulta $f'(c) = 0$ entonces $f(x) = f(a)$ $\forall x \in (a,b]$ y como es f es continua, es $f(x) = f(a)$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces f es constante en $[a,b]$. □

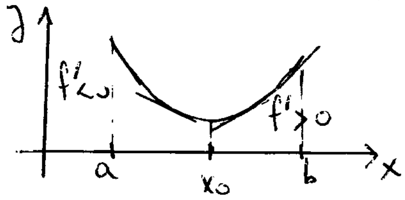
Observación: 1) Puede ser $f'(x) \geq 0$ en (a,b) y resultar f estrictamente creciente en $[a,b]$.
Ejemplo: $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 0$.
2) Puede ser creciente o decreciente en (a,b) y no ser derivable.



Teorema (criterio de la derivada primera para la determinación de extremos): Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) salvo a lo sumo en $x_0 \in (a,b)$.

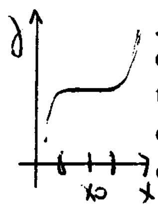
a) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,x_0)$ y $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0,b)$ entonces $f(x_0)$ es el máximo de f en (a,b).
b) Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,x_0)$ y $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0,b)$ entonces $f(x_0)$ es el mínimo de f en (a,b).





Dem: a) El teorema anterior nos dice que f es estrictamente creciente en (a, x_0) y estrictamente decreciente en (x_0, b), luego $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \neq x_0$ luego f tiene un máximo en x_0.

b) Análogo. $\square$



Recordemos que por teorema de Weierstrass si f es continua $[a, b]$ posee extremos absolutos, si además f es derivable en (a, b) entonces esos extremos pueden presentarse en a, b (los extremos del intervalo) o bien, en los puntos en donde $f'(x) = 0$, es decir en los puntos críticos, pero no necesariamente todos los puntos críticos serán extremos de f, por ejemplo si f constante en las cercanías de un punto crítico. Debemos estudiar entonces o bien el signo de la derivada primera en las cercanías del punto crítico o signo de la derivada segunda en el punto crítico, como lo demuestra el siguiente:

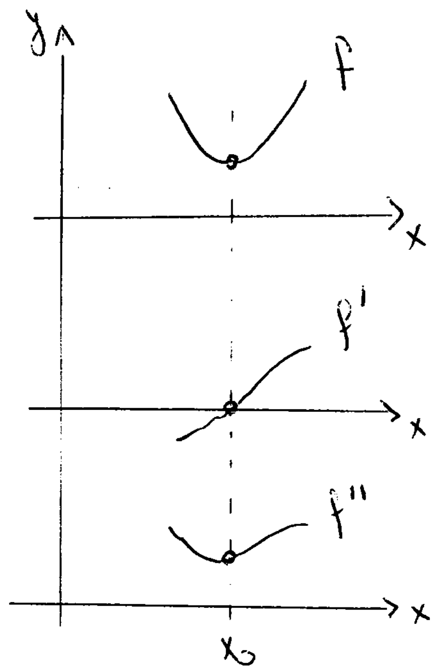
Teorema (criterio de la derivada segunda para la determinación de extremos): Sea f una función dos veces derivable en (a, b) tal que f'' es continua en $c \in (a, b)$ y $f'(c) = 0$ (c es punto crítico de f). Entonces:

a) Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

b) Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

Dem: a) Si $f''(c) > 0$, por ser f'' continua en c, existirá un entorno $E(c, \delta)$ donde $f''(x) > 0$ $\forall x \in E(c, \delta)$ (por teorema de conservación del signo). Por lo tanto por teorema anterior es f' estrictamente creciente en $E(c, \delta)$ pero como $f'(c) = 0$ y f' continua en $E(c, \delta)$ (por ser derivable) con lo que f' cambio de signo (de negativa a positiva) en c, luego f tiene un mínimo relativo en c.

b) análogo. $\square$



Ejemplo: Sea $f(x) = xe^{-x^2}$, f es dos veces derivable y f'' continua en $\mathbb{R}$. $f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = \underset{>0}{e^{-x^2}}(1 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, puntos críticos $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Criterio de derivada primera, intervalos de monotonía.

$f'(x) = \underset{>0}{e^{-x^2}}(1 - 2x^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $f'(x) = \underset{>0}{e^{-x^2}}(1 - 2x^2) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ entonces f es creciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

2) Criterio de derivada segunda.

$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}(-6x+4x^3)$, calculamos f'' en los puntos críticos:

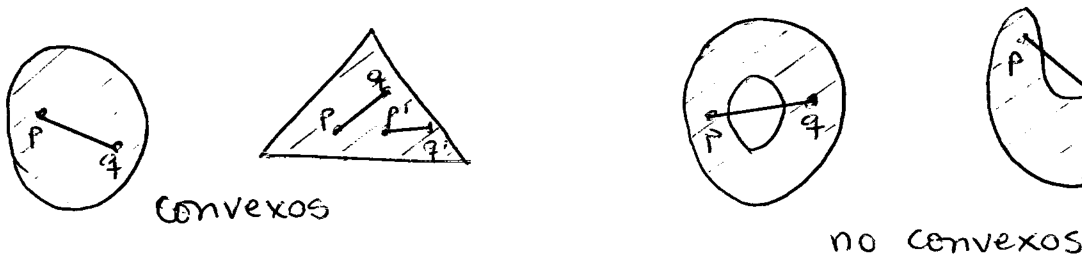
$$f''(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(-6\tfrac{\sqrt{2}}{2} + 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3) = -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0$$

$$f''(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(6\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3) = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

Por ambos criterios podemos concluir que f tiene en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ un max relativo y un min relativo en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

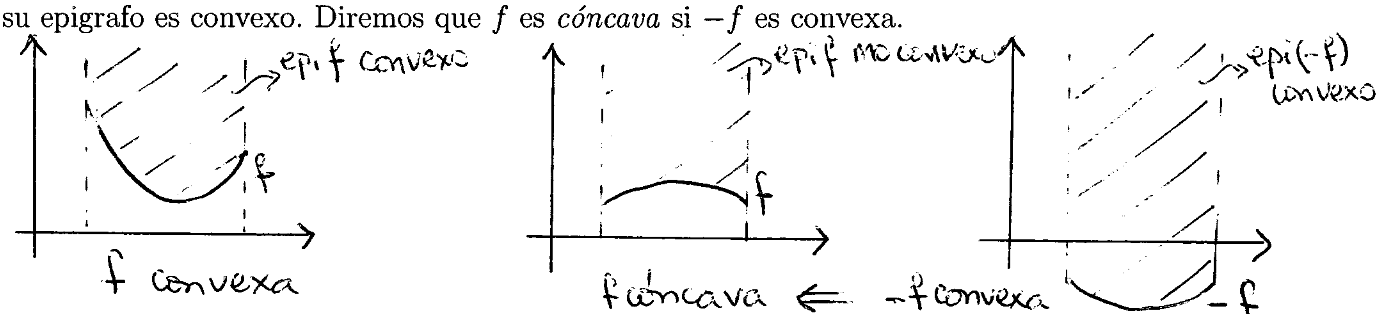
Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Definición: Un conjunto C se dice convexo si $\forall p, q \in C$, el segmento $\overline{pq} \subset C$.



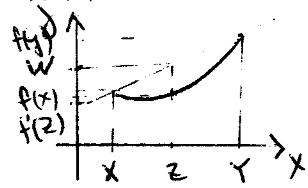
Cómo se aplican estos conceptos a una función?

Definición: Llamamos *epigrafo* a la región que está por encima de G_f. Diremos que f es *convexa*, si su epigrafo es convexo. Diremos que f es *cóncava* si $-f$ es convexa.



Consideremos un punto $z \in (x, y)$ entonces $z = \alpha y + (1-\alpha)x$ para algún $\alpha \in (0,1)$. El punto de abscisa z que está en el segmento $\overline{p_1 p_2}$ tiene ordenada $w = \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$. En efecto, como $z - x = \alpha(y - x)$

$$\frac{f(y)-f(x)}{\cancel{(y-x)}} = \frac{w - f(x)}{z - x} = \frac{w - f(x)}{\alpha\cancel{(y-x)}}$$



entonces $w - f(x) = \alpha(f(y) - f(x)) \Rightarrow w = \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$.

Definición:

a) Una función f se dice *convexa* en un intervalo $[a,b]$ sii cualesquiera sean $x, y \in [a,b]$ y $\alpha \in (0,1)$ se tiene

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \le \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$

b) Una función f se dice *cóncava* en un intervalo $[a,b]$ sii cualesquiera sean $x, y \in [a,b]$ y $\alpha \in (0,1)$ se tiene

$$f(\alpha y + (1-\alpha)x) \ge \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$$

14|3 **Ejemplo:** $f(x) = |x|$ en $\mathbb{R}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $z = \alpha y + (1-\alpha)\,x$, con $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= |z| = |\alpha y + (1-\alpha)\,x| \underset{\text{des triang}}{\leq} |\alpha y| + |(1-\alpha)\,x| = \underset{>0}{|\alpha|}\,|y| + \underset{>0}{|1-\alpha|}\,|x| = \\ &= \alpha\,|y| + (1-\alpha)\,|x| = \alpha f(y) + (1-\alpha)\,f(x) \end{aligned}$$

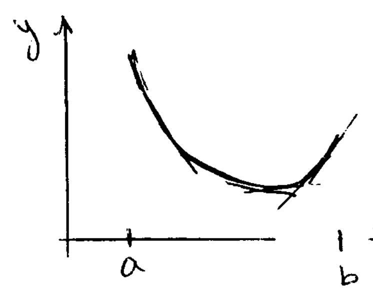
luego f es convexa en $\mathbb{R}$.

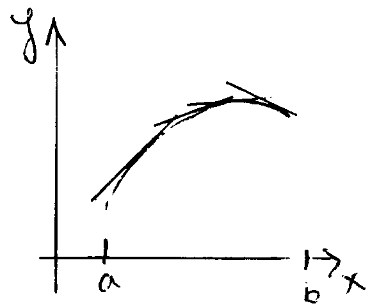
Propiedad: Si f es convexa en $[a,b]$, entonces $-f$ es cóncava en $[a,b]$.

Dem: ejercicio.

Teorema (criterios de la derivada primera y segunda para la determinación de la concavidad):

1) Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b):
   i) si f' es creciente en (a,b) entonces f es convexa en $[a,b]$,
   ii) si f' es decreciente en (a,b) entonces f es cóncava en $[a,b]$.
2) Además, si existe f'' en (a,b) :
   i) si $f'' \geq 0$ en (a,b) entonces f es convexa en $[a,b]$,
   ii) si $f'' \leq 0$ en (a,b) entonces f es cóncava en $[a,b]$.

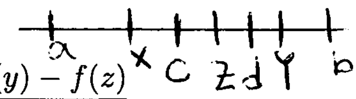




Dem: 1) i) Sean x, y tales que $a \leq x < y \leq b$ y $z = \alpha y + (1-\alpha)\,x$, con $\alpha \in (0,1)$. Veamos que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} f \text{ es convexa en } [a,b] &\Leftrightarrow f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)\,f(x) \Leftrightarrow \\ f(z) + \alpha f(z) - \alpha f(z) &\leq \alpha f(y) + (1-\alpha)\,f(x) \Leftrightarrow \\ f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha)\,f(z) &\leq \alpha f(y) + (1-\alpha)\,f(x) \Leftrightarrow \\ (1-\alpha)\,[f(z) - f(x)] &\leq \alpha\,[f(y) - f(z)] \end{aligned}$$

Mostraremos entonces que si f' es creciente, se obtiene esta última desigualdad. f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces f continua en $[x,z]$ y en $[z,y]$ y derivable en (x,z) y en (z,y). Por lo tanto, aplicando el TVM a f en cada uno de esos intervalos, podemos asegurar que existen $c \in (x,z)$ y $d \in (z,y)$ tales que



$$f'(c) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \qquad f'(d) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Como f' es creciente y $c < d$ resulta $f'(c) < f'(d)$ (*). Entonces

$$(1-\alpha)\,[f(z) - f(x)] = (1-\alpha)\,(z-x)\,f'(c) \leq (1-\alpha)\,(z-x)\,f'(d) \tag{1}$$

Ahora

$$(1-\alpha)z + \alpha z = z - \alpha z + \alpha z = z = \alpha y + (1-\alpha)\,x \Leftrightarrow (1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$$

Volviendo a (1) tenemos

$$(1-\alpha)\,(z-x)\,f'(d) = \alpha(y-z)f'(d) = \alpha[f(y)-f(z)]$$

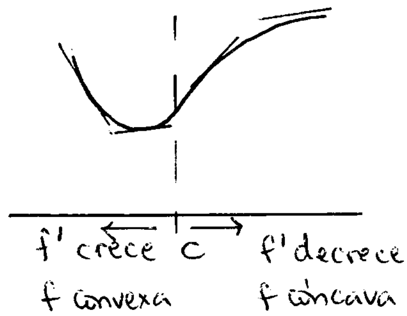
Por lo tanto f es convexa en $[a,b]$.

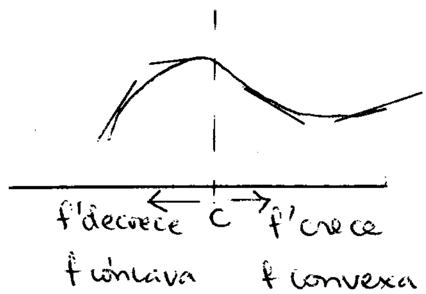
1) ii) Se puede repetir la demostración anterior teniendo en cuenta que si f' es decreciente $\Rightarrow$ $-f'$ es creciente $\Rightarrow$ $-f$ es convexa $\Rightarrow$ f es cóncava.

2) i) Si $f'' \geq 0$ en $(a,b) \Rightarrow f'$ es creciente en $(a,b) \Rightarrow f$ es convexa en $[a,b]$.

ii) análogo. □

Definición: Sea f derivable en c y c es un punto de contacto entre dos intervalos tales que f es convexa en uno de ellos y cóncava en el otro, diremos entonces que f tiene en c un *punto de inflexión.*





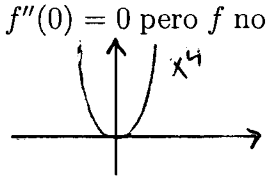
Teorema: Sea f derivable en I y $c \in I$. Entonces: f tiene un punto de inflexión en c si y sólo si f' tiene un extremo relativo en c.

Dem: ejercicio (idea vista en las gráficas).

Corolario: Sea f derivable en I y $c \in I$ un punto de inflexión de f. Si existe $f''(c)$, necesariamente será $f''(c) = 0$.

Dem: Resulta de aplicar a f' la condición necesaria para extremo de una función derivable. □

Observación: $f''(c) = 0$ no es condición suficiente para que f tenga un punto de inflexión en c. Ejemplo: $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, luego $f''(0) = 0$ pero f no tiene un punto de inflexión en 0.



__Estudio de la variación de una función__

Bosquejo del plan a seguir para el estudio de una función f y realizar un bosquejo de su gráfica. Determinar:

1. Dominio
2. Paridad
3. Raíces de la ecuación $f(x) = 0$ o intersección con el eje x, intersección con el eje y (los puntos $(0, f(0))$, si $0 \in \mathrm{dom} f$).

4. Límites: se calculan los que resulten de interés según la función.
   Ejemplo: Si $\text{dom}f = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   Si $\text{dom}f = (a, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Si $\text{dom}f = (-\infty, b)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
   Si $\text{dom}f = \mathbb{R} - \{c\}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

5. Asíntotas horizontales y verticales.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ y c tales que $\lim\limits_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$

6. Máximos y mínimos relativos.
   Buscamos puntos críticos (x tales que $f'(x) = 0$ o no existe $f'(x)$) criterios de la derivada 1º o 2º.

7. Intervalos de monotonía.
   Buscamos $\{x \in \text{dom}f : f'(x) > 0\}$ y $\{x \in \text{dom}f : f'(x) < 0\}$.

8. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
   Buscamos $\{x \in \text{dom}f : f''(x) > 0\}$, $\{x \in \text{dom}f : f''(x) < 0\}$ y $\{x \in \text{dom}f : f''(x) = 0\}$.

9. Extremos absolutos.

10. Gráfica.

Ejemplo: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1. $dom f = \mathbb{R} - \{0\}$

2. El dominio es simétrico, $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$, luego f es impar.

3. Intersección con el eje x, buscamos $x : x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = -1$ no tiene solución real, luego G_f no corta al eje x. Tampoco al eje y, ya que $\nexists\ f(0)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty$ luego $x = 0$ es asíntota vertical.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{-\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} = +\infty$ no hay asíntotas horizontales.

5. ya fueron analizadas en 4) (no hay más asíntotas verticales ya que f es continua en su dominio)

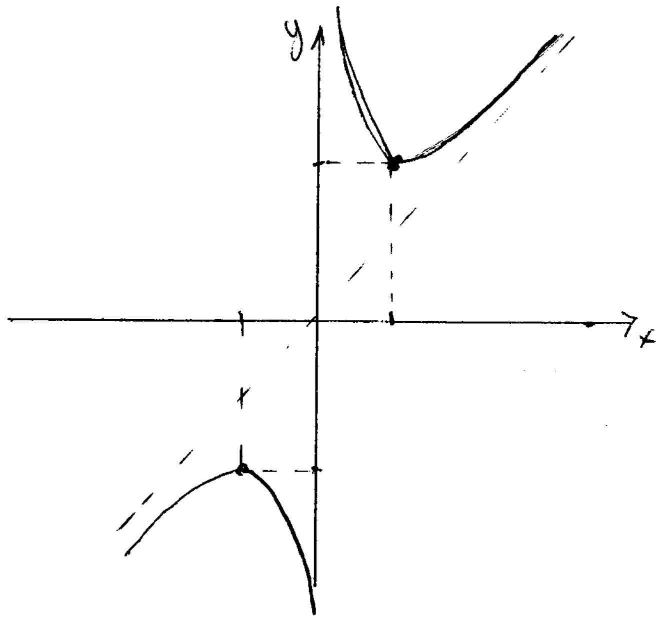
6. f es derivable en su dominio, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ puntos críticos
   $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f''(1) > 0$ luego f tiene en 1 un min relat, $f''(-1) < 0$ luego f tiene en -1 un max relat
   $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$

7. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ o $x < -1$, luego f es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, y decreciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$.

8. $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ luego f es convexa en $\mathbb{R}^+$ y cóncava en $\mathbb{R}^-$

9. Por los límites vistos en 4) f no posee extremos absolutos.

10. Gráfica



20|3 La Regla de Bernoulli-L´Hôpital

En Análisis I resolvimos límites con indeterminaciones del tipo "$\frac{0}{0}$" e "$\frac{\infty}{\infty}$", aplicando distintas técnicas. Pero hay límites de esos tipos que sólo pueden calcularse utilizando la siguiente regla:

Teorema (Regla de L´Hôpital): Sean f y g dos funciones derivables en un entorno (reducido) $\overset{\circ}{E}(a)$, tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

y supongamos que $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \overset{\circ}{E}(a)$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dem: Consideremos las funciones

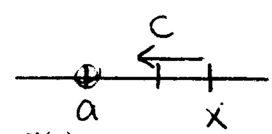
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Así definidas F y G son continuas en todo $E(a)$, ya que f y g los son (por ser derivables) en $\overset{\circ}{E}(a)$ y

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a) \qquad (\text{idem}G)$$

Sea $x \in \overset{\circ}{E}(a)$ y supongamos 1) $x > a$, F y G son continuas es $[a, x]$ y derivables en (a, x). Además $G' \neq 0$ en (a, x) (pues $G' = g'$). Por lo tanto, por el teorema de Cauchy, existe $c \in (a, x)$ tal que $F'(c)[G(x) - G(a)] = G'(c)[F(x) - F(a)]$ o sea

$$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} \underset{F(a)=G(a)=0}{=} \frac{F(x)}{G(x)}$$



Ahora, si $x \to a^+$, entonces $c \to a^+$ $(a < c < x)$ de modo que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Análogo para 2) $x < a$, se demuestra que $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ y luego $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$. $\square$

Nota: La regla de L´Hôpital (que indicaremos L'H) también se cumple cuando: f y g son dos funciones derivables en un entorno (reducido) $\overset{\circ}{E}(a)$, tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

y supongamos que $g'(x) \neq 0\ \forall x \in \overset{\circ}{E}(a)$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

es decir, cuando tenemos indeterminaciones del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$".

Teorema (Regla de L´Hôpital): Sean f y g dos funciones derivables en $(M, +\infty)$, siendo $M > 0$ fijo, supongamos que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$

y supongamos que $g'(x) \neq 0\ \forall x > M$. Entonces

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dem: Sean $F(t) = f(\frac{1}{t})$ y $G(t) = g(\frac{1}{t})$, entonces si $x = \frac{1}{t}$, será

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \frac{F(t)}{G(t)}$$

y además $t \to 0^+$ cuando $x \to +\infty$.

Como $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(t)}{G(t)}$ es una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", podemos aplicar regla LH ($G'(t) \neq 0$ $\forall 0 < t < \frac{1}{M}$) y tenemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} \Leftarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})\cancel{(\frac{-1}{t^2})}}{g'(\frac{1}{t})\cancel{(\frac{-1}{t^2})}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

luego
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$
$\square$

Nota: La regla de L´Hôpital también vale cuando: f y g son dos funciones derivables en $(M, +\infty)$, siendo $M > 0$ fijo, supongamos que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = \pm\infty$$

y supongamos que $g'(x) \neq 0\ \forall x > M$. Entonces

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

es decir, cuando tenemos indeterminaciones del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$".

También valen, teoremas análogos cuando tenemos indeterminaciones de tipo "$\frac{0}{0}$" o "$\frac{\infty}{\infty}$" cuando $x \to -\infty$ y $g'(x) \neq 0$ en $(-\infty, -M)$ será entonces

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Ejemplos:

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{\ln x}}{\underset{\searrow +\infty}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

2. $\displaystyle \lim_{x\to1} \frac{\overset{\nearrow 0}{\ln x}}{\underset{\searrow 0}{x-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

3. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{e^x}}{\underset{\searrow +\infty}{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{e^x}}{\underset{\searrow +\infty}{2x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$

   En general puede probarse que $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

4. Indeterminaciones del tipo "0.∞".

   $$\lim_{x\to0^+} \underset{\searrow 0^+}{x} \underset{\searrow -\infty}{\ln x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{\ln x}}{\underset{\searrow +\infty}{\frac{1}{x}}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$$

5. Indeterminaciones del tipo "∞ − ∞".

   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\underset{\searrow +\infty}{\sec x} - \underset{\searrow +\infty}{\tan x}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{\nearrow 0}{\overbrace{1-\sin x}}}{\underset{\searrow 0}{\cos x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

6. Indeterminaciones del tipo "1^∞".

   $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+\frac{1}{x})}_{\searrow 1^+}{}^{\overset{\nearrow +\infty}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overset{\nearrow +\infty}{x} \overset{\nearrow 0}{\overbrace{\ln(1+\frac{1}{x})}}}$ resolvemos la indeterminación "0.∞" del exponente

   $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{\ln(1+\frac{1}{x})}}{\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cancel{(-\frac{1}{x^2})}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$, luego como la exponencial es continua, tenemos

   $$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

23/3 Aproximación lineal. Polinomio de aproximación.

Teorema: Si f es derivable en x_0 entonces

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{P(x)} + \underbrace{O(x)(x-x_0)}_{E(x)}$$

siendo

$$\lim_{x\to x_0} O(x) = 0$$

Dem: Sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ y esto es equivalente a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$. Sea entonces

$$O(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

luego esta función verifica:

♦ $\lim\limits_{x\to x_0} O(x) = 0$

♦ $O(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \Longrightarrow \quad O(x)(x-x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x) - f(x_0)$

Luego $\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O(x)(x-x_0)$. □

Nota: El polinomio, $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, es la "aproximación lineal" de $f(x)$. Y el término $E(x) = O(x)(x-x_0)$ es el "error".

1) Este polinomio P satisface las siguientes condiciones:

♦ $P(x_0) = f(x_0)$

♦ $P'(x_0) = f'(x_0)$

♦ $\mathrm{gr}(P(x)) = 1$

♦ P es el único polinomio que satisface las tres condiciones anteriores.

En efecto, supongamos que existe $Q(x) = Ax + B$ (otro polinomio de grado 1) que verifica las condiciones, será $Q(x_0) = Ax_0 + B = f(x_0)$ y $Q'(x_0) = A = f'(x_0)$, luego $B = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Por lo tanto $Q(x) = Ax + B = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = P(x)$.

2) $E(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$ "más rápido" que $(x-x_0)$ y "al menos tan rápidamente" como $(x-x_0)^2$.

¿Qué queremos decir con estas expresiones? Antes de seguir daremos algunas definiciones:

Definición: Una función f se dice un *infinitésimo en a* (o cuando $x \to a$) si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Pudiendo ser también $a = \pm\infty$.

Ejemplos:

1) $f(x) = x - 1$ es un infinitésimo en 1.

2) $g(x) = e^x$ es un infinitésimo en $-\infty$.

Definición: Se dice que dos infinitésimos en a, $f(x)$ y $g(x)$ son *equivalentes* si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ejemplos:

1) $\sin x$ y x son infinitésimos equivalentes en 0, pues $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^{\nearrow 0}}{x_{\searrow 0}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, luego $e^x - 1$ y x son infinitésimos equivalentes en 0.

Definición (Comparación de infinitésimos): Sean f y g dos infinitésimos en a:

i) Se dice que f y g tienen el *mismo orden* si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$$

ii) Se dice que el orden de f es *mayor que el orden* de g si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

iii) Se dice que el orden de f es *menor que el orden* de g si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

iv) Cuando $\nexists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se dice que los infinitésimos *no son comparables.*

Ejemplos: $f(x) = x$, $g(x) = 1 - \cos x$ y $h(x) = x^2$ son infinitésimos en 0. Calculamos los límites de los cocientes

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, luego el orden de g es mayor que el de f.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$, luego g y h tienen el mismo orden.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, luego el orden de h es mayor que el de f, obvio por a, b).

Definición: Decimos que un infinitésimo f en a tiene orden α, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = k \neq 0$.

Volviendo a la pregunta que dejamos pendiente. Comparemos el orden de $E(x)$ con potencias de $(x - x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{O(x)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}} = \lim_{x \to x_0} O(x) = 0$$

Por lo tanto $E(x)$ es de mayor orden que $(x - x_0)$. Ahora veremos que $E(x)$ tiene orden mayor o igual que $(x - x_0)^2$. Para ello, sabemos que f es derivable en x_0, supongamos además que existen y son continuas f' y f'' en un entorno $\mathring{E}(x_0, \delta)$. Sean $E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ y $\varphi(x) = (x - x_0)^2$.
Estas funciones verifican: son derivables en $\mathring{E}(x_0, \delta)$ y además

$E'(x) = f'(x) - f'(x_0) \qquad E''(x) = f''(x) \qquad \varphi'(x) = 2(x - x_0) \qquad \varphi''(x) = 2$

Evaluadas en x_0 :

$E(x_0) = 0 \qquad E'(x_0) = 0 \qquad E''(x_0) = f''(x_0) \qquad \varphi(x_0) = 0 \qquad \varphi'(x_0) = 0 \qquad \varphi''(x_0) = 2$

Luego si $x_0 < x < x_0 + \delta$ tenemos que

$$\frac{E(x)}{\varphi(x)} = \frac{E(x) - \overset{=0}{E(x_0)}}{\varphi(x) - \underset{=0}{\varphi(x_0)}} \underset{\exists \xi_1 \,:\, x_0 < \xi_1 < x}{\overset{\text{Cauchy}}{=}} \frac{E'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} = \frac{E'(\xi_1) - \overset{=0}{E'(x_0)}}{\varphi'(\xi_1) - \underset{=0}{\varphi'(x_0)}} \underset{\exists \xi \,:\, x_0 < \xi < \xi_1 < x}{\overset{\text{Cauchy}}{=}} \frac{E''(\xi)}{\varphi''(\xi)}$$

Por lo tanto

$$\frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{E''(\xi)}{\varphi''(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{2}$$

es decir, $E(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$ si $x_0 < \xi < x$.

Análogamente se demuestra para $x_0 - \delta < x < x_0$ que $E(x) = \dfrac{f''(\eta)}{2}(x - x_0)^2$ si $x < \eta < x_0$. Además cuando $x \to x_0$ resulta $\xi \to x_0$ y $\eta \to x_0$ y f'' continua, entonces para $x > x_0$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

lo mismo para $x < x_0$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{\eta \to x_0} \frac{\frac{f''(\eta)}{2}\cancel{(x - x_0)^2}}{\cancel{(x - x_0)^2}} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Como ambos límites existen y son iguales, es

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

y por lo tanto el orden de $E(x)$ es mayor o igual de $(x-x_0)^2$ (pues $f''(x_0)$ puede ser cero).

27/3 Fórmula final que $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2}_{\text{Fórmula de Lagrange para el error}} \qquad \text{con } \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x.$$

Acotación del error

$$|E(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}\right| \left|(x-x_0)^2\right| \leq M(x-x_0)^2, \qquad \text{si } \left|\frac{f''(\xi)}{2}\right| \leq M$$

El punto intermedio ξ (entre x_0 y x) puede expresarse como

$$\xi = \alpha x + (1-\alpha)x_0, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

o más comunmente:

$$\xi = x_0 + \alpha(x-x_0), \quad 0 < \alpha < 1$$

Ejemplos:

1) Sean $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. $f'(x) = f''(x) = e^x$.
   $P(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$
   $E(x) = \frac{e^\xi}{2}x^2$ con ξ entre 0 y x, o sea $\xi = \alpha x$ con $0 < \alpha < 1$.
   Luego

$$e^x = 1 + x + \frac{e^\xi}{2}x^2 = 1 + x + \frac{e^{\alpha x}}{2}x^2 \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

2) Sean $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$.
   $P(x) = f(0) + f'(0)x = x$
   $E(x) = \frac{-\sin\xi}{2}x^2 = \frac{-\sin\alpha x}{2}x^2$ con $\xi = \alpha x$ con $0 < \alpha < 1$.
   Luego

$$\sin x = x - \frac{\sin\alpha x}{2}x^2 = 1 + x + \frac{e^{\alpha x}}{2}x^2 \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Además $|E(x)| = \left|\frac{-\sin\alpha x}{2}x^2\right| \leq \frac{|-\sin\alpha x|}{2}x^2 \leq \frac{x^2}{2}$. Por ejemplo, $\sin 0{,}1 \simeq 0{,}1$ con error $< \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}005$

Diferencial de una función.

Vimos que si f es derivable en x_0, entonces vale

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O(x)(x-x_0) \qquad \text{con } \lim_{x\to x_0} O(x) = 0$$

O bien

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + O(x)(x-x_0)$$

Sean $\Delta x = x - x_0$ el *incremento de* x y $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ el *incremento de* f. Así, resulta

$$\Delta f = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{término lineal}} + \underbrace{O(x)\Delta x}_{\text{término no lineal}} \qquad \text{con } \lim_{\Delta x \to 0} O(x) = \lim_{x \to x_0} O(x) = 0$$

Observación: Ambos términos son infinitésimos en 0.
Definición: Llamamos *diferencial* de f en x_0, y notamos df, a la parte lineal del incremento de Δf, es decir

$$df = f'(x_0)\Delta x$$

Así, como $x = x_0 + \Delta x$

$$\Delta f = df + O(x_0 + \Delta x)\Delta x = df + E(\Delta x) \qquad \text{con } \lim_{\Delta x \to 0} E(\Delta x) = 0$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, Δf y df son infinitésimos equivalentes cuando $\Delta x \to 0$. En efecto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}{f'(x_0)} = 1$$

Por otra parte

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{E(\Delta x)}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(x_0 + \Delta x)\cancel{\Delta x}}{f'(x_0)\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(x_0 + \Delta x)}{\underbrace{f'(x_0)}_{\neq 0}} = 0$$

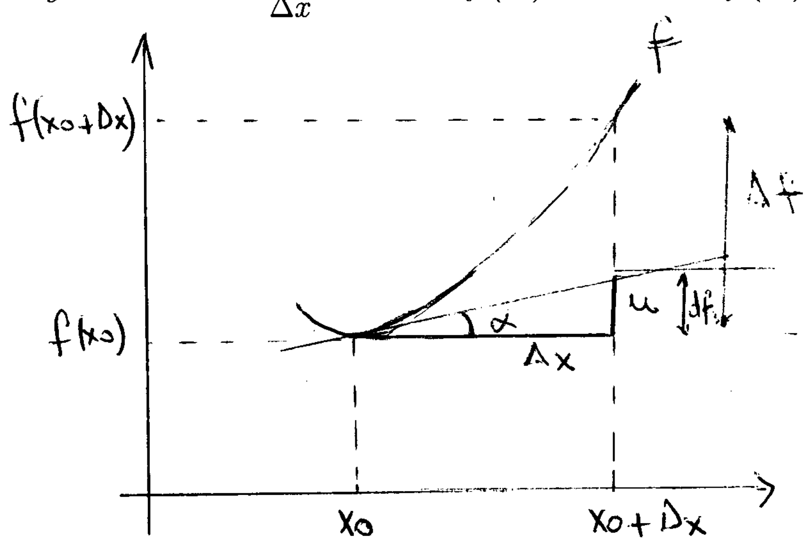
Por lo tanto el orden de E es mayor que el de df (o sea, $E(\Delta x) \to 0$ más rápidamente que df).

$$\Delta f = \underbrace{df}_{\simeq \Delta f} + \underbrace{E(\Delta x)}_{\searrow 0 \text{ más rápido que } df}$$

df : parte principal de Δf. Se considera que para valores pequeños de Δx, $\Delta f \simeq df$. Es decir,

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &\simeq df = f'(x_0)\Delta x \\ f(x_0 + \Delta x) &\simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = P(x) = P(x_0 + \Delta x) \end{aligned}$$

Interpretación geométrica. $\quad \dfrac{u}{\Delta x} = \tan\alpha = f'(x_0) \qquad u = f'(x_0)\Delta x = df$



Observación: Si $y = \varphi(x) = x$ función identidad. $d\varphi = 1\Delta x$ entonces

$$dx = \Delta x$$

El incremento de la función identidad, coincide con su diferencial, que es igual al incremento de la variable independiente.

$$y = f(x), \qquad dy = df = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Aplicación al cálculo numérico aproximado.

Ejemplo: Calcular aproximadamente $\sqrt{101}$.
Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 100$ y $\Delta x = 1$. Entonces, como $f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ será

$$\sqrt{101} \simeq \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}1 = 10 + \frac{1}{20} = 10{,}05$$

Polinomios de Taylor.

$P(x)$ es la mejor aproximación lineal de $f(x)$ cerca de $x = x_0 = a$. Pero se puede tener una mejor aproximación de $f(x)$ que la lineal, con polinomios de mayor grado.

Teorema: Se puede probar que si f es dos veces derivable en un entorno de a entonces

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{T_2(x)} + E(x) \qquad \text{con } \lim_{x \to a} E(x) = 0$$

Este polinomio T_2 es el único polinomio de grado menor o igual que 2 que verifica:

$$T_2(a) = f(a) \qquad T_2'(a) = f'(a) \qquad T_2''(a) = f''(a)$$

En general,
Definición: Si f es n veces derivable en un entorno de a, llamamos *polinomio de Taylor de grado n de f alrededor de a* al polinomio

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{2}(x-a)^n$$

Se tiene que T_n es el único polinomio de grado menor o igual que n tal que sus primeras n derivadas en a coinciden con f y sus n primeras derivadas en a y además

$$f(x) = T_n(x) + E(x) \qquad \text{con } \lim_{x \to a} E(x) = 0$$

Puede probarse además que

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{con } \xi \text{ entre } a \text{ y } x.$$

Ejemplo: Calcular $T_2(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$ con $a = x_0 = 100$ y $\Delta x = 1$.