Unidad 4 – Cálculo integral para campos escalares

Integrales dobles sobre rectángulos.

Idea intuitiva: Se tratará de dar un sentido al "volumen" del cuerpo C *prismoide* limitado por los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ y la superficie de ecuación $z = f(x, y)$.

Consideremos prismas de base R_{jk} y altura $f(c_{jk})$ para cierto $c_{jk} \in R_{jk}$. El volumen de cada uno de estos prismas P_{jk} será

$$V_{jk} = \text{vol}(P_{jk}) = a(R_{jk}).f(c_{jk})$$

y aproximamos el volumen del cuerpo C por $\quad V = \text{vol}(C) \simeq \sum_{j,k} V_{jk}$.

Definición (Campo escalar integrable en un rectángulo): Sea $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Una **partición regular $\mathcal{P}$ de R de orden** n es un conjunto de $(n+1)^2$ puntos $(x_j, y_k) \in \mathbb{R}^2$ tales que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$

con $\quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \dfrac{b-a}{n} \quad$ y $\quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \dfrac{d-c}{n}$.

La norma de la partición $\mathcal{P}$ está dada por $\|\mathcal{P}\| = \max\limits_{j,k=0,1,\ldots,n-1} \{|\Delta x_j|, |\Delta y_k|\}$.

Formamos rectángulos $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$. Elegimos $c_{jk} \in R_{jk}$, y para el campo escalar $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideramos las sumas

$$V_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x_j \Delta y_k$$

Entonces V_n es la suma de Riemann de f y si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} V_n = V$, independientemente de la elección de los c_{jk}, decimos que f **es integrable en** R y que

$$\int_R f = V$$

Notamos

$$\int_R f = \int_R f(x,y)\, dA = \int_R f(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dxdy$$

donde dA es el **diferencial de área.**

Definición (Volumen de un prismoide): Si $f \geq 0$ e integrable en R se define **volumen del prismoide C** al número

$$\text{vol}(C) = V = \int_R f dA$$

Ejemplos: 1) Si $f(x,y) = q = cte$ en $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces el prismoide es un prisma!!

$V_n = \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x_j \Delta y_k = \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} q \dfrac{b-a}{n} \dfrac{d-c}{n} = q(b-a)(d-c)$ entonces, independientemente de la elección de c_{jk}, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} V_n = q(b-a)(d-c)$ entonces f es integrable en R y $\int\limits_R f =$ vol(prisma) $= qa(R)$. En particular, si $f = 1$ es $\int\limits_R f = a(R)$.

2) Función de Dirichlet, sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$V_n = \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x_j \Delta y_k = \begin{cases} 1\ a(R) & \text{si } c_{jk} \in \mathbb{Q}^2 \\ 0\ a(R) & \text{si no} \end{cases}$ como depende de la elección de c_{jk} no existe $\lim V_n$ entonces f no es integrable en R.

De la definición y de los teoremas sobre límites podemos deducir algunas propiedades fundamentales de $\int\limits_R f$:

Teorema: Si f, g son integrables en $R = [a,b] \times [c,d]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

a) `Linealidad:` $f + g$ es integrable en R y $\int\limits_R (f+g) = \int\limits_R f + \int\limits_R g$

b) `Homogeneidad:` αf es integrable en R y $\int\limits_R \alpha f = \alpha \int\limits_R f$

c) `Monotonía:` i) Si $f \geq 0$ en $R \Rightarrow \int\limits_R f \geq 0$

ii) Si $f \geq g$ en $R \Rightarrow \int\limits_R f \geq \int\limits_R g$

iii) $R_1 \subset R_2$ y $f \geq 0$ en $R_2 \Rightarrow \int_{R_1} f \leq \int_{R_2} f$

d) `Aditividad:` Si R_i, $i = 1, \ldots, m$, son rectángulos disjuntos, tales que f es integrable sobre cada R_i y si $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces una función acotada $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable sobre R y $\int\limits_R f = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{R_i} f$.

Integrabilidad de funciones continuas. Teorema de Fubini.

Teorema de Fubini: Si f es continua en $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces f es integrable en R. Y además vale *Fubini*

$$\int\limits_R f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Cada una de estas integrales se llaman **integrales iteradas**.

Interpretación geométrica.

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$. Dada la superficie de ecuación $z = f(x,y)$, para cada $x \in [a,b]$ consideramos las regiones rayadas que se obtienen de la intersección de planos paralelos al plano coordenado yz con el prismoide P en los puntos de abscisa x, cuya área es $A(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$, así

$$\mathrm{vol}(prismoide) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b A(x)\, dx$$

De manera análoga, si para cada $y \in [c,d]$ consideramos las regiones rayadas que se obtienen de la intersección de planos paralelos al plano coordenado xz con el prismoide P en los puntos de ordenada y, cuya área es $A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$, así

$$\mathrm{vol}(P) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_c^d A(y)\, dy$$

Definición (**Conjunto de contenido nulo**): Llamamos **conjunto de contenido nulo** a un conjunto que es a lo sumo unión finita de gráficas de funciones continuas.
Teorema: Sea $R = [a,b] \times [c,d]$. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ acotada y tal que el conjunto de puntos de discontinuidades de f es un conjunto de contenido nulo. Entonces f es integrable en R y vale Fubini (supuesto que existan las integrales iteradas).

Ejemplos: a) Sean C_1, C_2 dos curvas, será $C_1 \cup C_2$ un conjunto de contenido nulo, luego si f es continua en $R - (C_1 \cup C_2)$ resulta f integrable en R y vale Fubini. Más aún, vale si f es continua en R salvo una cantidad finita de curvas.

b) $f(x,y) = x^2y^3 + 3x$ y $R = [-1,2] \times [-3,1]$. f es continua en R entonces f es integrable en R y vale Fubini, luego $\int\limits_R f = \int_{-1}^2 \underbrace{\left(\int_{-3}^1 \left(x^2y^3 + 3x\right) dy\right)}_{A(x)} dx = \int_{-1}^2 \left(x^2 \frac{y^4}{4} + 3xy \Big|_{-3}^{1} \right) dx = \int_{-1}^2 (-20x^2 + 12x)\, dx =$

$-20\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = -42$

c) $f(x,y) = xe^{xy}$ y $R = [-3,3] \times [0,1]$. f es continua en R entonces f es integrable en R y vale Fubini, luego $\int\limits_R f = \int_{-3}^3 \underbrace{\left(\int_0^1 xe^{xy} dy\right)}_{A(x)} dx = \int_{-3}^3 \left(x\frac{e^{xy}}{x}\Big|_0^1 \right) dx = \int_{-3}^3 (e^x - 1)\, dx = e^3 - e^{-3} - 6$

d) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2x < y \\ 1 & \text{si } 2x \geq y \end{cases}$ y $R = [0,1] \times [0,2]$. f es acotada en R (las discontinuidades de f son un conjunto de contenido nulo) entonces f es integrable en R y vale Fubini, luego

$$\int\limits_R f = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^2 f(x,y)\, dy\right)}_{A(x)} dx = \int_0^1 2x dx = 1$$

siendo $A(x) = \int_0^2 f(x,y)\, dy = \int_0^{2x} 1 dy + \int_{2x}^2 0 dy = 2x$

e) $f(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{si } y \leq \sqrt{x} \\ x + y & \text{si } y > \sqrt{x} \end{cases}$ y $R = [0,2] \times [0, \sqrt{2}]$.
f es acotada en R (las discontinuidades de f son un conjunto de contenido nulo) entonces f es integrable en R y vale Fubini, luego

1°) $\int\limits_R f = \int_0^2 \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{2}} f(x,y)\, dy\right)}_{A(x)} dx$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} (x-y)\, dy + \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}} (x+y)\, dy\right) dx = \ldots = 2\sqrt{2}$$

2°) $\int\limits_R f = \int_0^{\sqrt{2}} \underbrace{\left(\int_0^2 f(x,y)\,dx \right)}_{A(y)} dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{y^2} (x+y)\,dx + \int_{y^2}^{2} (x-y)\,dx \right) dy = \ldots. = 2\sqrt{2}$

Teorema: Si f es integrable en $R = [a,b] \times [c,d]$ también lo es $|f|$ y vale

$$\left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$$

Extensión de la integral a regiones de $\mathbb{R}^2$ más generales. Teorema del Valor Medio.

Definición (Regiones elementales en $\mathbb{R}^2$): Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ decimos que la **región**

- D es de **tipo 1** si $D = \{(x,y) : x \in [a,b]$ y $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ con φ_1, φ_2 continuas en $[a,b]$.

- D es de **tipo 2** si $D = \{(x,y) : y \in [c,d]$ y $w_1(y) \leq x \leq w_2(y)\}$ con w_1, w_2 continuas en $[c,d]$.

- D es de **tipo 3** o **normal** si D es de tipo 1 y 2.

- D es **elemental** si es de tipo 1, 2 o 3. Toda región elemental es cerrada y acotada.

Ejemplo: $D = \left\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\right\}$ es de tipo 3. En efecto, si definimos $\varphi_1(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}$ y $\varphi_2(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}$ ambas son continuas en $[x_0 - r, x_0 + r]$, resulta entonces D de tipo 1. Si ahora definimos $w_1(y) = x_0 + \sqrt{r^2 - (y-y_0)^2}$ y $w_2(y) = x_0 - \sqrt{r^2 - (y-y_0)^2}$ ambas continuas en $[y_0 - r, y_0 + r]$, resulta entonces D de tipo 2.

Definición (Integral sobre una región elemental): Sea D una región elemental y R un rectángulo tal que $D \subset R$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en D (entonces acotada) se define $f^* : R \to \mathbb{R}$ por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{en } D \\ 0 & \text{en } R - D \end{cases}$$

decimos que f^* es una extensión acotada de f a R y definimos

$$\int_D f = \int_R f^*$$

Observemos que por el teorema anterior el 2° miembro está bien definido, las discontinuidades de f^* están en un conjunto de contenido nulo.

Propiedad de aditividad: Sea $D = D_1 \cup D_2$ donde $D_1 \cap D_2 = A$ es un conjunto de contenido nulo entonces

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

Teorema: Si D es elemental (por ejemplo de tipo 1, hay un teorema análogo si D es de tipo 2) y f continua en D entonces

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,(x,y)\,dy \right) dx$$

Observación: Si $f = 1$ en D, es integrable y $\int_D f = a(D)$.

Teorema del Valor Medio para integrales dobles: Sea f continua en una región D elemental, entonces existe $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\int_D f = f\,(x_0, y_0)\; a\,(D) \tag{9}$$

Demostración: Como D cerrado y acotado y f es continua en D, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de extremos de f, es decir $\exists\; m, M$ y $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in D$ tales que

$$m = \min_D f\,(x,y) = f\,(x_1, y_1) \qquad M = \max_D f\,(x,y) = f\,(x_2, y_2)$$

Luego para cada $(x,y) \in D$ se tiene

$$m \le f\,(x,y) \le M$$

Si $m \ge 0$, por linealidad y monotonía o comparación tenemos

$$\begin{aligned} m\,a\,(D) &\le \int_D f \le M\,a\,(D) \\ m &\le \frac{\int_D f}{a\,(D)} \le M \end{aligned}$$

Por teorema de los valores intermedios, f alcanza cada uno de los valores entre m y M, en particular $\dfrac{\int_D f}{a\,(D)}$. Luego existe $(x_0, y_0) \in D$ tal que $f(x_0, y_0) = \dfrac{\int_D f}{a\,(D)}$. Si $m < 0$, podemos considerar la función g definida en D por $g(x,y) = f(x,y) + 2|m|$, ésta resulta continua y acotada en D. Su mínimo será no negativo, y por lo recién demostrado, será válido el teorema para g, es decir, existe $(x_0, y_0) \in D$ tal que $g(x_0, y_0) = \dfrac{\int_D g}{a\,(D)}$ entonces

$$f(x_0, y_0) + 2|m| = \frac{\int_D f + \int_D 2|m|}{a\,(D)} = \frac{\int_D f}{a(D)} + 2|m|$$

De donde vale el teorema. □

Dominios de Integración más generales.

Si D no es elemental pero es unión de dos regiones elementales (por ejemplo dos de tipo 1) cuya intersección es un conjunto de contenido nulo, vale

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

En general si D es unión finita de n regiones elementales que no tienen en común sino puntos frontera (puntos que pertenecen a conjuntos de contenido nulo) entonces se define

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{n} \int_{D_i} f$$

Integral triple sobre un cubo.

Definición (Campo escalar integrable en un cubo): Sea $Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,h] \subset \mathbb{R}^3$. Una *partición regular* $\mathcal{P}$ de Q de orden n es un conjunto de $(n+1)^3$ puntos $(x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3$ tales que
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$,
$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, $e = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = h$;
con $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$, $\quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j = \dfrac{d-c}{n}$ $\quad$ y $\quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \dfrac{h-e}{n}$.

La norma de la partición $\mathcal{P}$ está dada por $\|\mathcal{P}\| = \max\limits_{i,j,k=0,1,\ldots,n-1} \{|\Delta x_i|, |\Delta y_j|, |\Delta z_k|\}$.
Formamos cubos $Q_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$. Elegimos $c_{ijk} \in Q_{ijk}$, entonces para el campo escalar $f : Q \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, consideramos las sumas

$$S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f\left(c_{ijk}\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Entonces S_n es la suma de Riemann de f y si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S_n$, independientemente de la elección de los c_{ijk}, decimos que f **es integrable en** Q y que

$$\int\limits_Q f = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Notamos

$$\int_Q f = \int_Q f dV = \iiint\limits_Q f dV = \iiint\limits_Q f\left(x,y,z\right) dxdydz$$

donde dV es el **diferencial de volumen.**

Ejemplos: a) Sea $f(x,y,z) = k = cte$ en Q, $S_n = \sum\limits_{i,j,k=0}^{n-1} k\, \dfrac{b-a}{n} \dfrac{d-c}{n} \dfrac{h-e}{n} = k\left(b-a\right)\left(d-c\right)\left(h-e\right)$,
luego existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ y vale

$$\iiint\limits_Q f dV = \iiint\limits_Q k dV = k\left(b-a\right)\left(d-c\right)\left(h-e\right) = k\mathrm{vol}\left(Q\right)$$

En particular, si $f = 1$ es integrable sobre Q y $\iiint\limits_Q 1 dV = \mathrm{vol}\left(Q\right)$.

b) Función de Dirichlet, $f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, f no es integrable en cualquier cubo.

Valen teoremas análogos a los teoremas anteriores:
Teorema: Sean f, g integrables en $Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,h]$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

a) `Linealidad:` $\quad f+g$ es integrable en Q y $\int\limits_Q (f+g) = \int\limits_Q f + \int\limits_Q g$

b) `Homogeneidad:` $\quad \alpha f$ es integrable en Q y $\int\limits_Q \alpha f = \alpha \int\limits_Q f$

c) `Monotonía:` i) Si $f \geq 0$ en $Q \Rightarrow \int\limits_Q f \geq 0$

ii) Si $f \geq g$ en $Q \Rightarrow \int\limits_Q f \geq \int\limits_Q g$

iii) $Q_1 \subset Q_2$ y $f \geq 0$ en $Q_2 \Rightarrow \int_{Q_1} f \leq \int_{Q_2} f$

d) `Aditividad:` Si Q_i, $i = 1, \ldots, m$, son prismas o cubos disjuntos, tales que f es integrable sobre cada Q_i y si $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_m$ es un prisma o cubo, entonces una función acotada $f : Q \to \mathbb{R}$ es integrable sobre Q y $\int\limits_Q f = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{Q_i} f$.

Corolario: Si f es integrable en Q también lo es $|f|$ y vale

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |\, f|$$

Teorema de Fubini: Si f continua en Q (o f acotada en Q y f continua salvo en un conjunto de contenido nulo) entonces f es integrable en Q y vale $Fubini$

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \iiint\limits_Q f dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^h f\,(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \qquad \text{(integrales iteradas)} \\ &= \iint\limits_D \left(\int_e^h f\,(x,y,z)\,dz \right) dA \qquad \text{(otras 5 formas, 1 por cada cara del cubo)} \end{aligned}$$

Integral triple sobre conjuntos más generales.

Definición (Regiones elementales en $\mathbb{R}^3$): Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ decimos que la **región**

- D es de **tipo 1** si y sólo si $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in S$ elemental en $\mathbb{R}^2$ y $\varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$
- D es de **tipo 2** si y sólo si $D = \{(x,y,z) : (y,z) \in S$ elemental en $\mathbb{R}^2$ y $\varphi_1(y,z) \leq x \leq \varphi_2(y,z)\}$
- D es de **tipo 3** si y sólo si $D = \{(x,y,z) : (x,z) \in S$ elemental en $\mathbb{R}^2$ y $\varphi_1(x,z) \leq y \leq \varphi_2(x,z)\}$
  Siendo en cada caso los campos φ_1, φ_2 continuos en S.
- D es de **tipo 4** o **normal** si y sólo si es de tipo 1, 2 y 3.
- D es **elemental** si es de tipo 1 o 2 o 3 o 4. Toda región elemental es cerrada y acotada.

Definición (Integral de un campo escalar en una región elemental): Si f es continua en D región elemental y $D \subset Q$ definimos f^* extensión acotada por cero de f a todo Q y definimos

$$\int_D f = \int_Q f^*$$

Teorema: Si D es elemental (por ejemplo de tipo 1) y f es continua en D entonces

$$\int_D f = \iint\limits_S \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz \right) dA$$

(análogos para D de tipo 2 o 3).

Ejemplos:

a) Si D es elemental entonces vol$(D) = \int_D 1\ dV$.

b) Si queremos calcular el volumen de E_a = esfera de radio a. E_a es de tipo 1, pues consideramos S =círculo de radio a y $\varphi_1(x,y) = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$, $\varphi_2(x,y) = -\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ funciones continuas en S. Entonces

$$\mathrm{Vol}\,(E_a) = \int_{E_a} 1dV = \iint\limits_{S} dA \int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} 1\ dz \ldots\ldots\ldots \text{ muy complicado}$$

Aplicaciones de las integrales dobles y triples.

A) Área de una región D. Volumen de un sólido E.

$$a(D) = \iint\limits_D 1\ dA \qquad\qquad V(E) = \iiint\limits_E 1\ dV$$

Si $f(x,y) = k \geq 0$ entonces $V(E) = \iint\limits_D kdA = ka(D)$

Si $f \geq 0$ en D y E es el sólido $E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ entonces

$$V(E) = \iint\limits_D f(x,y)dA$$

B) Valor medio de un campo escalar.

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = f(x_0,y_0)a(D) \qquad\qquad \iiint\limits_E f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0)V(E)$$

C) Masa de un cuerpo.

Masa: resistencia al desplazamiento, $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{P} = m\vec{g}$. Sea D (placa o lámina) y E (sólido).

Se define *densidad* $\delta = \dfrac{m(D)}{a\,(D)}$ (caso de una placa) o $\delta = \dfrac{m(E)}{Vol\,(E)}$ (caso de un sólido). Luego

$$m(D) = \delta \cdot a\,(D) \qquad \text{o} \qquad m(E) = \delta \cdot Vol\,(E)$$

1° Caso: $\delta = cte$, entonces el cuerpo se dice **homogéneo** y su masa viene dada por

$$m(D) = \delta \cdot a\,(D) = \delta \iint\limits_D dA \qquad\qquad m(E) = \delta \cdot Vol\,(E) = \delta \iiint\limits_E dV$$

2° Caso: δ variable $\delta\,(x,y)$ continua en el dominio D, (análogamente si $\delta(x,y,z)$ es la densidad puntual para un sólido E)

Tenemos entonces

$$\boxed{m(D) = \iint\limits_D \delta\,(x,y)\,dA} \qquad \textbf{masa de una placa } D$$

$$\boxed{m(E) = \iiint\limits_E \delta\,(x,y,z)\,dV} \qquad \textbf{masa de un sólido } E$$

Una vez definida la masa de una placa o de un sólido es posible definir centro de masa o centro de gravedad del cuerpo.

D) Centro de masa o centro de gravedad.

Para el caso de una lámina (placa) D con densidad (superficial) puntual dada por $\delta(x, y)$ las fórmulas para las **coordenadas del centro de masa de una placa** D son:

$$\boxed{x_g = \frac{\iint\limits_D x\delta(x, y)\, dA}{m(D)}} \qquad \boxed{y_g = \frac{\iint\limits_D y\delta(x, y)\, dA}{m(D)}}$$

Para un sólido E con densidad (superficial) puntual dada por $\delta(x, y, z)$ las fórmulas para las **coordenadas del centro de masa de un sólido** E son:

$$\boxed{x_g = \frac{\iiint\limits_E x\delta(x, y, z)\, dV}{m(E)}} \qquad \boxed{y_g = \frac{\iiint\limits_E y\delta(x, y, z)\, dV}{m(E)}} \qquad \boxed{z_g = \frac{\iiint\limits_E z\delta(x, y, z)\, dV}{m(E)}}$$