# Práctica 0

**1.** Sea $F_n$ la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

1. Probar que:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

2. Desarrollar fórmulas para las siguientes sumas:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{2i}$$

**2.** Encontrar una forma cerrada para la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=0}^{n} a + bi$$

**3.** Probar usando propiedades aritméticas que $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1})$ para $k \in \mathbb{Z}^+$.

**4.** ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos? Probar las respuestas.

1. $n^2 \in O(n^3)$
2. $n^2 \in \Omega(n^3)$
3. $2^n \in \Theta(2^{n+1})$
4. $n! \in \Theta((n+1)!)$

**5.** Demostrar que $f \in \Theta(g)$ si y solo si existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n \geq n_0 \bullet 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

**6.** Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asintóticamente no negativas y $h(n) = f(n) + g(n)$, demostrar que

$$h(n) \in \Theta(\text{máx}(f(n), g(n)))$$

**7.** Dadas $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, demostrar las siguientes propiedades de las notaciones asintóticas:

1. $O$ y $\Omega$ son transitivas
2. $f$ asintóticamente no negativa $\Rightarrow f(n) \in \Theta(f(n))$
3. $\Theta$ es simétrica
4. $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$
5. $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+ \cdot kf(n) \in O(g(n))$
6. $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+ \cdot kf(n) \in \Omega(g(n))$

**8.** Sean a, b $\in \mathbb{R}$ constantes, b positivo, probar que

1. $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$
2. $b^n \in \Theta(b^{n+a})$

**9.** Demostrar que dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asintóticamente no negativas, y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = k$ con $k \in \mathbb{R}^+$, entonces $f(n) \in \Theta(g(n))$.

**10.** Encontrar dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ tal que $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$. Probar la respuesta.