FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática
Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

DUALIDAD

1. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K y V^* es el espacio dual de V, i.e.

$$V^* = \{f : V \to K \ f \text{ lineal}\}$$

probar que V^* es un espacio vectorial sobre K con la suma y producto por un escalar usuales en funciones.

2. Si V espacio vectorial de dimensión finita sobre K y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada de V, definimos:

$$f^i : V \to K \text{ tal que } f^i(v) = ([v]_B)_i$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Demostrar que

   a) $f^i \in V^*$ para todo $i = 1, \ldots, n$,
   b) $\{f^1, \ldots, f^n\}$ es una base de V^*.
   A esta base se la llama *base dual de B* y se la nota B^*.

3. Sean V y W espacios vectoriales sobre K, V^* y W^* sus respectivos espacios duales.

Si $T : V \to W$ es una aplicación lineal, definimos su *aplicación dual*, $T^* : W^* \to V^*$ y verifica que para toda $g \in W^*$, $T^*(g) = g \circ T$.

   a) mostrar que T^* es lineal
   b) T^* queda determinada por T de manera única?

4. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, A la matriz de la transformación, y B y C las bases ordenadas (fijadas) en V y W, respectivamente. Probar entonces, que A^T es la matriz de la transformación T^* asociada a las bases duales B^* y C^*.

5. Si V es un espacio vectorial sore K, se llama *espacio bidual*, V^{**} al espacio dual de V^*. Demostrar que:

   a) Si para cada $u \in V$ definimos la función $F_u : V^* \to K$ tal que $F_u(g) = g(u)$ para $g \in V^*$, demostrar que $F_u \in V^{**}$ para cualquier $u \in V$.
   b) Si $T : V \to V^{**}$ es tal que $T(u) = F_u$ para $u \in V$ entonces T es lineal y no singular.
   c) Como corolario de las propiedades anteriores probar que si V es de dimensión finita entonces la función T definida anteriormente es un isomorfismo. Esto es, V y V^{**} son espacios isomorfos.