FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática
Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA 1: Eliminación Gaussiana. Factorización LU *(segunda parte)*

1. Encontrar los factores L, D, y U de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema $Ax = b$, donde $b = (6, 0, -6)^T$.

2. Probar que AA^T y A^TA son siempre simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Mostrar también que $A + A^T$ es simétrica si A es cuadrada. ¿Qué sucede con $A - A^T$?

3. Mostrar que los pivotes de A son también los pivotes de A^T.

4. *a*) Hallar la factorización LDU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

   b) Aprovechando lo hecho en el ítem anterior, resolver el sistema $A^Tx = (2, 5, 5)^T$.

5. Recordemos que la matriz $E_{ij}(a)$ (con $i > j$) está definida por

$$E_{ij}(a) = (m_{k,l})_{n\times n}, \qquad \text{donde} \qquad m_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l. \\ 0 & \text{si } k \neq i \text{ ó } l \neq j, \text{ y } k \neq l. \\ a & \text{si } k = i \text{ y } l = j. \end{cases}$$

   a) Probar que $[E_{ij}(a)]e_l$ (que es la columna l de $E_{ij}(a)$) verifica:

$$[E_{ij}(a)]e_l = \begin{cases} e_l, \text{ si } l \neq j \\ e_j + ae_i, \text{ si } l = j \end{cases}$$

   b) Dado $r \in \mathbb{N}$, probar que $[E_{ij}(a)]^r = E_{ij}(ra)$.

   c) Determinar la matriz $[E_{i,j}(a)]^{-1}$.

   d) Determinar la matriz $E_{i,j}(a).E_{i',j'}(b)$, donde $i' > j'$, $i \leq i'$ y $j \leq j'$.

6. Resolver mediante intercambio de filas cuando sea necesario

$$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & 4v & + & 2w & = & -2 \\ -2u & - & 8v & + & 3w & = & 32 \\ & & v & + & w & = & 1 \end{array}$$

7. Encontrar la factorización $PA = LDU$ de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. ¿Cuĺes son los valores de a y b que conducen a intercambio de filas y cuáles son los que hacen a la matriz singular?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

9. Demostrar los siguientes enunciados:

   a) Si $E_{i,j}(-a)$ sustrae de una ecuación un múltiplo de otra, entonces $[E_{i,j}(-a)]^{-1}$ lo suma nuevamente.

   b) Si $P_{i,j}$ intercambia dos filas, entonces $(P_{i,j})^{-1}$ las vuelve a intercambiar, es decir $(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$.

   c) Si D es una matriz diagonal, con entradas en la diagonal $d_1, d_2, \cdots, d_n$ no nulas, entonces D^{-1} es también diagonal con entradas en la diagonal $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \cdots, \frac{1}{d_n}$.

10. Una matriz es de *permutación* si es cuadrada, con entradas 0-1 y con un sólo 1 en cada fila y en cada columna. Probar que si P es una matriz de permutación, entonces $P^T = P^{-1}$. Comparar con el ejercicio 9*b*.

11. Encontrar, cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 1 de la primera parte, utilizando el método de Gauss-Jordan.