FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática
Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA 2: Espacios Vectoriales *(primera parte)*

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son un espacio vectorial.

   a) El conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma y el producto por escalar usuales.

   b) El conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma $x+y$ definida como $x.y$ y el producto cx como x^c.

   c) El conjunto de las funciones pares, con la suma y porducto por escalar usuales.

   d) El conjunto de las funciones continuas, con el producto cf definido como $(cf)(x) = f(cx)$ y la suma habitual de funciones.

   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas, con el producto por escalar habitual y la suma $f+g$ definida como $(f+g)(x) = f(g(x))$.

   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluído el polinomio mulo, con la suma y producto por escalar habituales.

   g) $\mathbb{R}^2$ con el producto por escalar habitual y la suma de $x = (x_1, x_2)^T$ e $y = (y_1, y_2)^T$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T$.

   Decir en cada caso que no resulte e.v., cuál es la propiedad que se está violando.

2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0}+x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\bar{x}$ tal que $x + \bar{x} = \mathbf{0}$.

   Demostrar los siguientes enunciados.

   a) *Unicidad del neutro*: si $\mathbf{0}' \in V$ es tal que $\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

   b) *Unicidad del opuesto*: dado $x \in V$, si $\bar{x}' \in V$ es tal que $x + \bar{x}' = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x}' = \bar{x}$.

   c) *Propiedad cancelativa*: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.

   d) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

   e) $0 \cdot v = \mathbf{0} \ \ \forall v \in V$.

   f) $(-\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$, donde $-v$ es el opuesto de $v, \forall v \in V$.

   g) Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbb{O}$.

3. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   a) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 0$.

   b) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 1$.

   c) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 b_2 b_3 = 0$.

   d) El conjunto formado por las 3-uplas (x, y, z) tal que $x + y - 2z = 4$.

e) El conjunto formado por las 3-uplas (b_2, b_2, b_3) que son combinación lineal de $v = (1, 4, 0)$ y $w = (2, 2, 2)$.

f) El conjunto formado por las 3-uplas (b_2, b_2, b_3) tal que $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

g) El conjunto formado por las 3-uplas (b_2, b_2, b_3) que verifican $b_1 \leq b_2 \leq b_3$.

4. Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar también lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un conjunto que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto que cumpla lo contrario.

5. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{(n\times n)}$.

   a) El conjunto de las matrices triangulares.

   b) El conjunto de las matrices singulares.

   c) El conjunto de las matrices simétricas.

6. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que

$$U + W = \{v \in V \ : \ v = u + w, \ u \in U, w \in W\}$$

   es un subespacio de V.

7. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B

   b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

8. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. ¿Para qué vectores $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ los siguientes sistemas tienen solución?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

10. Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ Probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contención sea estricta.

11. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^\infty$?

   a) $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \ : |\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}| \text{ es finito } \}$.

   b) $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \ : \exists\, i_0 \in \mathbb{N} / x_i = 0 \ \forall \ i \geq i_0\}$.

   c) $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \ : x_i \geq x_{i+1} \ \forall \ i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de sucesiones decrecientes)

   d) $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \ : \exists \lim_{i\to\infty} x_i\}$ (conjunto de sucesiones convergentes)

   e) $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \ : \exists\, c \in \mathbb{R} \ / \ x_{i+1} = c + x_i \ \forall \ i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de progresiones aritméticas)

   f) $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \ : \exists\, c \in \mathbb{R} \ / \ x_{i+1} = cx_i \ \forall \ i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de progresiones geométicas)