FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática
Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA 2: Espacios Vectoriales *(segunda parte)*

A lo largo de esta práctica $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el conjunto de los números reales, salvo que se aclare lo contrario.

1. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A. ¿Qué sucede con el espacio fila de A y el espacio nulo de B^T?

2. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

   Comparar con el ejercicio 6 de la primera parte de esta práctica.

3. Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codominio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalar usuales).

   Sean $V_I = \{f \in V : \ f \text{ es una función impar }\}$ y $V_P = \{f \in V : \ f \text{ es una función par }\}$.

   Probar que:

   a) V_I y V_P son subespacios de V.

   b) $V_I + V_P = V$.

   c) $V_I \cap V_P = \{\mathbf{0}\}$.

4. Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V tales que $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Probar que para cada $v \in V$, existen y son únicos dos vectores w_1 y w_2 tales que $v = w_1 + w_2$ y $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$.

5. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

   c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

6. Sea $\langle S\rangle$ el subespacio generado por un subconjunto S de un espacio vectorial V. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) Si $S \subset T$, entonces $\langle S\rangle \subset \langle T\rangle$.
   b) $S \subset \langle S\rangle$.
   c) Si $S \subset T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S\rangle \subset T$ (esta propiedad se expresa diciendo que $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S).
   d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S\rangle = S$.
   e) Si $\langle S\rangle = U$, entonces $\langle U\rangle = U$.
   f) Sea $W \subseteq V$. Entonces:
      1) $\langle S \cap W\rangle \subset \langle S\rangle \cap \langle W\rangle$.
      2) $\langle S \cup W\rangle \subset \langle S\rangle + \langle W\rangle$.
   g) ¿Valen las contenciones inversas en los items (a) y (f)?

7. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Considere el espacio vectorial V de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3 (junto al polinomio nulo). Sean $p_i \in V$, $i = 1, \ldots, 5$ dados por:

$$p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad p_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8, \quad p_3(x) = x^2 + 5x$$

$$p_4(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12 \quad \text{y} \quad p_5(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 3.$$

   Para $j \in \{4, 5\}$, determine si $p_j \in \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$.

9. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes:

   a) $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$
   b) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, (x, y, z) para x, y, z culesquiera.

10. Sea $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y + z - t = 0\}$.

   a) Verificar que P es subespacio de $\mathbb{R}^4$.
   b) Hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

11. Probar que:

   a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es l.d..
   b) Si S es l.i. entonces T es l.i. $\forall T \subset S$.
   c) Si S es l.d. entonces T es l.d. $\forall T \supset S$.

12. Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto l.i., probar que $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ también es l.i.

13. Sean A y b dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Para cualquier s y t encontrar el conjunto solución de la ecuación $Ax = b$.

   a) ¿Para que valores de t son las columnas de A linealmente dependientes?

   b) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de s son linealmente dependientes?

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que dim $W =$ dim V. Probar que $V = W$.

15. Sea $A = \{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   a) Una base de $\mathbb{R}^3$ constituida íntegramente por vectores de A.

   b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en (a).

16. Sea $S = \langle\{(1, -1, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (4, -1, 2)^T\}\rangle \subset \mathbb{R}^3$. Obtener una base de S.

17. Encontrar las dimensiones de:

   a) el espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

   b) el espacio nulo de la matriz $I \in M_{4\times 4}$

   c) el espacio de las matrices simétricas 3 por 3. Halle una base.

18. Describir los cuatro subespacios asociados con las siguientes matrices y hallar una base para cada uno de ellos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19. Dados a, b, c con $a \neq 0$,¿cómo debe elegirse d para que A tenga rango 1?. Con esta elección, factorizar a A en uv^T

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

20. Dar en cada caso una matriz que cumpla con las condiciones dadas o justificar porqué no existe:

   a) Su espacio columna está generado por los vectores $(1, 0, 0)^T$ y $(0, 0, 1)^T$, y su espacio fila está generado por $(1, 1)^T$ y $(1, 2)^T$.

   b) Su espacio columna tiene a $(1, 1, 1)^T$ como base y su espacio fila tiene a $(1, 2, 1)^T$ como base.

   c) Su espacio columna tiene a $(1, 1, 0)^T$ y $(1, 0, 1^T)$ pero no a $(1, 1, 1)^T$.

   d) Su espacio columna contiene a $(1, 2, 1)^T$, su espacio nulo contiene a $(-1, 0, 1)^T$ y tiene determinante -1.