FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática
Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA Nº 3: **Espacio vectorial con producto interno. Subespacio Ortogonal.**

En los siguientes ejercicios V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ de dimensión finita.

1. Sea V=$\mathbb{R}^n$ con la suma y producto por escalar en $\mathbb{R}$, usuales. Determinar si el producto definido en cada caso, es un producto interno en $\mathbb{R}^n$. Indicar qué axioma no se verifica en caso de no serlo:

   a) $u \times v = \sum_{i=1}^{n} u_i \left|v_i\right|$

   b) $u \times v = \left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right|$

   c) $u \times v = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{i=1}^{n} v_i$

   d) $u \times v = (\sum_{i=1}^{n} u_i^2 v_i^2)^{\frac{1}{2}}$

2. *a)* Verificar que $A \times B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ es un producto interno en $\mathbb{R}^{n\times n}$ (conocido como producto de Frobenius).

   b) Probar que $A \times B = tr\left(AB^T\right)$.

   c) Probar que $AB \times C = B \times A^T C$.

3. Verificar que $u \times v = \int_1^e \ln x.u\left(x\right).v\left(x\right)dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}\left([1,e]\right)$, el conjunto de las funciones reales continuas en $[1,e]$.

4. Dados $u, v \in V$, e.v. con producto interno, probar que $u = v$ sii $u \times w = v \times w$ para todo $w \in V$.

5. Sea $W \underset{s.e.}{\subseteq} V$, V e.v. con producto interno. Probar que $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

6. Sean

   $$v_1^T = (-1,-4,-3,4) \qquad v_2^T = (1,2,-1,-2) \qquad v_3^T = (0,1,2,-1)$$

   a) Sea $Z = \{v_1, v_2, v_3\}$. Probar $\langle Z\rangle = (Z^{\perp})^{\perp}$ y en particular, $Z \subsetneq (Z^{\perp})^{\perp}$.

   b) Determinar una base y la dimensión del espacio U generado por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

   c) Determinar una base y la dimensión de $U^{\perp}$.

7. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno definido en el ejercicio 2

   a) Hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^{n\times n}$ con este producto interno.

b) Hallar $W^\perp$, si $W = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ con este producto interno.

c) Idem (b) para $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

8. Sea $u = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6})^T$ y sea $P = uu^T$.

   a) Probar que $Pu = u$.

   b) Probar que si v es ortogonal a u entonces $Pv = 0$.

   c) ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{N}(P)$? Encontrar una base para $\mathcal{N}(P)$.

Definición 1. *Diremos que una función*

$$\begin{array}{rccc} \|.\|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \|x\| \end{array}$$

es una norma en V, si satisface las siguientes condiciones.

N1 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *para todo par* $x, y \in V$.

N2 $\|ax\| = |a|\|x\||$ *para* $x \in V$, $a \in \mathbb{C}$ *(o* $\mathbb{R}$*).*

N3 $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *sii* $x = 0$.

9. Probar que si V es un espacio vectorial con producto interno $\times$, entonces la función definida por $\|x\| = (x \times x)^{\frac{1}{2}}$, es una norma sobre V.

10. Verificar, en cada caso, que la función dada es una norma en $\mathbb{R}^n$. ¿Provienen de algún producto interno?

    a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

    b) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

    c) $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

11. Sea V un espacio vectorial y $\|x\|$ una norma sobre V.

    a) Probar que $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$, para todo par $x, y \in V$.

    b) Probar que $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ para todo $x \in V - \{0\}$.

12. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $\times$, y $\|x\| = (x \times x)^{\frac{1}{2}}$. Si $\dim(V) = n$ y $\{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto ortogonal de V, probar que:

    a) $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V.

    b) Si $\|v_i\| = 1$ para todo i, $x = \sum_{i=1}^n x \times v_i \quad \forall\, x \in V$

    c) Si $\|v_i\| = 1$ para todo i, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x \times v_i|^2 \quad \forall\, x \in V$

13. Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\times$ y $\|x\| = (x \times x)^{\frac{1}{2}}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) $u \times v = 0$

    b) $\|u + v\| = \|u - v\|$

    c) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

d) $\|u + cv\| \geq \|u\| \ \forall c \in \mathbb{R}$

14. Probar que si V es un espacio vectorial con producto interno $\times$, y $\|\cdot\|$ es la norma definida en el ejercicio anterior, entonces

$$|x \times y| \leq \|x\|\|y\|,$$

para todo par $x, y \in V$. Esta desigualdad se conoce con el nombre de **Cauchy-Schwarz**.

Observación 2. *La desigualdad del ejercicio 14, permite definir el coseno del ángulo que forman dos vectores como*

$$cos(x, y) = \frac{x \times y}{\|x\| \, \|y\|}$$

15. *a)* Verificar que $u \times v = \int\limits_{-1}^{1} u\,(x)\,.v\,(x)\,dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}\,([-1,1])$, el conjunto de las funciones reales continuas en $[-1,1]$.

    b) Si $u_1\,(x) = 1$, $u_2\,(x) = x$ y $u_3\,(x) = 1 + x$, verificar que dos de ellas son ortogonales, dos forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ y las dos restantes, un ángulo de $\frac{\pi}{6}$.

16. Sea $\mathcal{C}\,([1, e])$, con el producto interno definido en el ejercicio 3.

    a) Calcular $\|f\|$ para $f\,(x) = \sqrt{2}$.

    b) Hallar un polinomio de grado uno que sea ortogonal a $g\,(x) = 1$.