UNR Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática, Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA 4: Proceso de Gram-Schmidt y proyecciones

1. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene rango r, también tienen rango r las matrices A^T, AA^T y A^TA. Dar un ejemplo para mostrar que AA^T puede ser inversible sin que lo sea A^TA.

2. Sean
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Hallar la matriz P de proyección sobre el espacio generado por $\{u_1, u_2\}$. Calcular la proyección de b sobre el complemento ortogonal de dicho espacio.

3. Hallar la matriz de proyección sobre el plano $2x + y - z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Probar que la matriz Q es ortogonal si y sólo si Q es inversible y $Q^{-1} = Q^T$.

5. Probar que el producto de matrices ortogonales también es una matriz ortogonal.

6. Sea $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interno usual. Probar que si $||u||_2 = 1$ entonces la matriz $Q = I - 2uu^T$ es una matriz ortogonal. Hallar Q si $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

7. Determinar valores para $a, b, \dots, f$ de manera que las siguientes sean matrices ortogonales.

   a)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{pmatrix}$$

   b)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

8. *a*) Encontrar c, x_1, x_2, x_3 y x_4 de modo que la matriz
$$Q = c\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & x_1 \\ -1 & 1 & -1 & x_2 \\ -1 & -1 & -1 & x_3 \\ -1 & -1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal.

b) Obtener la proyección del vector $b = (1,1,1,1)^T$ sobre el espacio generado por la primer columna de Q. Luego proyectar b sobre el espacio generado por las dos primeras columnas de Q.

9. Sea S el subespacio generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de S.

b) Hallar una base de $S^{\perp}$.

c) Hallar la matriz de proyección sobre S.

10. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,2,1)^T$, $(2,2,0)^T$ y $(0,-3,-3)^T$.

a) Hallar una base para $V^{\perp}$.

b) Hallar una base ortonormal para V.

c) Extender la base hallada en (b) a una base de $\mathbb{R}^3$.

11. Sea $V = \mathcal{C}([-1,1])$ con producto interno $f \times g = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$, $B = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ donde $p_j : [-1,1] \to \mathbb{R} / p_j(x) = x^j, j = 0, ..., 3$ y $W = < B >$.

a) Hallar la matriz de acoplamiento de B.

b) Determinar si B es base ortonormal; si no lo es hallar B' base ortonormal de W. En este caso hallar la matriz de acoplamiento de B'.