FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática, Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA 5: Transformaciones Lineales

Para esta práctica, salvo que se aclare lo contrario, los espacios vectoriales $(V, +, \cdot)$ para $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ están pensados con las operaciones usuales que correspondan en cada caso y sobre el cuerpo de los números reales.

1. Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo:
   - Obtener $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$,
   - calcular la dimensión de $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ y
   - determinar si T es inversible.

   a) $T((x, y)^T) = (y, x)^T$.
   b) $T((x, y)^T) = (x^2, y^2)^T$.
   c) $T((x, y)^T) = (x, -y)^T$.
   d) $T((x, y)^T) = (x, 0)^T$.

2. Sea $V = \mathbb{R}^n$, fijamos la base canónica $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, hallar A_i tal que $A_i x = T_i(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, .., 4$.

   a) $T_1(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
   b) $T_2(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
   c) $T_3(x) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
   d) $T_4(x) = y$, donde $y = (y_k)_{k=1}^n$, $y_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k \neq i, j \\ x_i & \text{si } k = j \\ x_j & \text{si } k = i \end{cases}$

3. Consideremos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

   $T(e_1) = e_1 + e_2$

   $T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2$

   Obtener

   a) $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ y $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$.

b) las matrices asociadas a T y T^2 en la base B.

c) $T(v)\ \forall v \in V$.

4. Sean $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T_1((x,y,z)^T) = (x,y,0)^T$ y $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T_2((x,y,z)^T) = (x,y,y)^T$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$. Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

5. Definimos $P_n[x] = \{p : p$ polinomio a coeficientes reales de grado $\leq n, x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$
Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to P_3[x]$, definida por
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d).$$

   a) Probar que T es lineal.

   b) Hallar una base para $\mathcal{N}(T)$ y una para $\mathcal{R}(T)$.

   c) Determinar si T es un isomorfismo.

6. Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ / \ f(z) = z + w\overline{z}$, donde $w = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Considerar $w = 1 + i$ y calcular $T_w(2+3i)$.

   b) Comprobar que T_w es una transformación lineal entre espacios vectoriales.

   c) Si $B = \{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.

   d) Probar que T_w es isomorfismo si y sólo si el número real $a^2 + b^2 \neq 1$.

7. Sea $T : P_n[x] \to P_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_0 + a_1(x+1) + ... + a_n(x+1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x+y, x+z, \alpha \cdot v)^T$, donde $v = (x,y,z)^T$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.

9. Sean V y W espacios vectoriales, $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V y $\{w_1, ..., w_n\} \subset W$. Probar que existe una única aplicación lineal $T : V \to W \ / \ T(v_i) = w_i$, $i = 1, .., n$.

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que
$$T((0,0,1)^T) = (2,3,5)^T \qquad T((0,1,1)^T) = (1,0,0)^T \qquad T((1,1,1)^T) = (0,1,-1)^T.$$

    a) Probar que con esta información es posible obtener $T(v)\ \forall v \in \mathbb{R}^3$.

    b) Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

    c) Utilizando b), obtener dim $\mathcal{N}(T)$ y dim $\mathcal{R}(T)$

    d) Determinar si T es inversible.

11. Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique: $T((1,-1,1)^T) = (1,0)^T$ y $T((1,1,1)^T) = (0,1)^T$.

12. Si V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $L = \{T : V \to W : T$ transformación lineal$\}$. Probar que para $T_1, T_2 \in L$

    a) $\{v \in V \ / \ T_1(v) = T_2(v)\} \underset{s.e.}{\subset} V$.

    b) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u)\ \forall\, u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v)\ \forall\, v \in V$.

13. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que:

    a) Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos l.i. de V en conjuntos l.i. de W.

    b) Si T sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.

    c) T isomorfismo si y solo si T transforma bases de V en bases de W.