FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática, Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA 6: **Autovalores y autovectores**

1. Hallar el polinomio característico y los autovalores las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Hallar el polinomio característico, los autovalores λ y sus respectivos conjuntos de autovectores $E(\lambda)$, de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \ \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \ \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{e)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ \text{f)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Analizar si son diagonalizables las matrices siguientes. En caso de serlo, dar una forma diagonal D_i asociada y hallar una matriz inversible C_i tal que $D_i = C_i^{-1} A_i C_i$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 16 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Idem ejercicio 3 para las matrices dadas en el ejercicio 2. (Sugerencia: utilizar lo calculado en el ejercicio 2).

5. Sea A una matriz de orden 3 con autovalores 0, 3 y 5 y autovectores u, v y w asociados a estos autovalores respectivamente.

   a) Dar una base de $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ y una base de $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

   b) Hallar la solución de $Ax = v + w$.

c) Mostrar que $Ax = u$ no tiene solución.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$ tal que x es autovector correspondiente al autovalor λ de la matriz AA^T. Probar que λ es autovalor de la matriz A^TA.

7. Para $u, v \in \mathbb{R}$, sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$
   a) Hallar los autovalores de A, en función de u y v.
   b) Hallar todos los valores de u y v tales que A sea diagonalizable.

8. Sea
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}.$$
   a) Hallar los valores de b y c, en función de a, de manera que 1 y -1 sean autovalores de A.
   b) Si 1 y -1 son autovalores, tiene A dos autovectores linealmente independientes?
   c) Elegir a de manera que los autovectores de A sean ortogonales.

9. Sean $v \in \mathbb{R}^n$, $||v|| = 1$, y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $A = \lambda v v^T$:
   a) Probar que λ es autovalor simple de A. Determinar su autovector asociado y los restantes $n-1$ autovalores de A.
   b) Probar que A es diagonalizable.
   c) Concluir que $rg(A) = 1$.

10. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$
   a) Hallar los autovalores de A (en función de α).
   b) Hallar los valores de α tales que A sea:
      1) diagonalizable.
      2) inversible.
      3) simétrica y semidefinida positiva.

11. Sea
$$A = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
   a) Hallar los autovalores y autovectores de A en función de a y b
   b) Hallar valores de a y b tales que A sea
      1) diagonalizable.
      2) semidefinida positiva.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Probar que:
   a) A^2 es definida positiva si y sólo si 0 no es autovalor de A.
   b) Si A^2 es definida positiva, $x \times y = x^TA^2y$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.