FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - 2017

PRÁCTICA N°2: APLICACIONES DE LA DERIVADA

LA REGLA DE BERNOULLI - L´HÔPITAL

1. Utilizando la regla de Bernoulli-L´Hôpital calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$,

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$,

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\arctan x}$,

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{3x}$,

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{\operatorname{sen} 3x}$,

   f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$,

   g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$,

   h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$,

   i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{0,001}}$,

   j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,

   k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$,

   l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

   m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$,

   n) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

2. a) Sean f y g dos funciones tales que existe un número $M > 0$ tal que

   $$x > M \Rightarrow \ f \text{ y } g \text{ son derivables en el punto } x \text{ y además } g(x) \neq 0.$$

   Entonces,

   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \ \Rightarrow \ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

   b) Calcular los siguientes límites

   1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x^{-1}}{\arctan x^{-1}}$,

   2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Calcular los siguientes límites

   a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$,

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$,

   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$,

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$,

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\tan x}\right)$,

   f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

   g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x - \operatorname{arc\,sen} x}{x(1-\cos x)}$,

   h) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

   i) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}}$.

POLINOMIOS DE TAYLOR

4. Obtener los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para cada una de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = xe^x$, $n = 3$, $a = 1$,
   b) $f_2(x) = x^3 \ln x$, $n = 7$, $a = 1$,
   c) $f_3(x) = x^5 + x^3 + x$, $n = 4$, $a = 0$.

5. Dadas las funciones $f_1(x) = e^{mx}$, $f_2(x) = \operatorname{sen}(mx)$ y $f_3(x) = \frac{1}{1+x}$,

   a) Comprobar, utilizando el principio de inducción matemática, que sus derivadas sucesivas verifican las igualdades siguientes:

      1) $f_1^{(n)}(x) = m^n e^{mx}$,
      2) $f_2^{(n)}(x) = m^n \operatorname{sen}\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right)$,
      3) $f_3^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

   b) Demostrar que los polinomios de Taylor asociados a las funciones enunciadas en el apartado anterior, verifican las siguientes igualdades:

      1) $T_n(f_1, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} -\frac{m^k}{k!} x^k$,
      2) $T_{2n-1}(f_2, 0)(x) = T_{2n}(F_2, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$,
      3) $T_n(f_3, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

6. Utilizando los resultados del ejercicio anterior y las propiedades de los polinomios de Taylor, para demostrar que los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto $a = 0$, verifican las igualdades correspondientes:

   a) $f_1(x) = \operatorname{sen} 3x$, $T_{2n-1}(f_1, 0)(x) = T_{2n}(f_1, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$,
   b) $f_2(x) = \cos x$, $T_{2n}(f_2, 0)(x) = T_{2n+1}(f_2, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$,
   c) $f_3(x) = e^{-x}$, $T_n(f_3, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$,
   d) $f_5(x) = \ln(1 + x)$, $T_n(f_6, 0)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

7. A partir de la igualdad para $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

   obtener los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0 y una expresión del resto correspondiente:

   a) $f_1(x) = \ln(1 + x)$,
   b) $f_2(x) = \ln(1 - x)$,
   c) $f_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$,
   d) $f_4(x) = \frac{x}{1-x^2}$,
   e) $f_5(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$,
   f) $f_6(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
   g) $f_7(x) = \frac{1}{2+x}$,
   h) $f_8(x) = \arctan x$.

8. Obtener un valor aproximado de los siguientes números con cinco cifras decimales exactas:

    a) $e^{-0,2}$,   b) $\cos \frac{\pi}{36}$,   c) $\ln 1,2$.

9. Calcular el grado del polinomio de Taylor necesario para obtener las siete primeras cifras decimales del número $\ln 5$ utilizando la fórmula de Taylor correspondiente a la función $f(x) = \ln(x+1)$.