FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Análisis Matemático I 2017

Sabrina Roscani - Alberto Ferrari - Melani Barrios - Marianela Bozzo

Práctica 1 complementaria.

1. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
se define la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar y tal que para todo $x \in \mathbb{R}^+$ sea $g(x) = f(x)$.
a) Representar gráficamente las funciones f y g e indicar sus recorridos.
b) Encontrar la ley de la función g.

2. En cada uno de los siguientes casos esbozar, de ser posible, la gráfica de una función que cumpla con las propiedades especificadas. En el caso de no ser posible, justifique el porqué.
a) f es una función creciente en $[-1,1]$ y decreciente en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.
b) h es una función par y periódica de período 2.
c) s es una función periódica de período p y estrictamente creciente.
d) j es una función impar, creciente en $(0,1)$ y en $[1,+\infty)$ pero que no es creciente en $(0,+\infty)$.

3. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde
$$x \in \mathbb{R} \quad \to \quad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$
se pide representar gráficamente a f y a las funciones definidas de la siguiente manera:
$$\begin{array}{ll} i) f_1(x) = f(2x), & iv) f_4(x) = f(x) - \frac{1}{2}, \\ ii) f_2(x) = -2f(x-1), & v) f_5(x) = |f_4(x)|, \\ iii) f_3(x) = f(x+2), & vi) f_6(x) = f_3(-x). \end{array}$$

4. Completar cuadrados para que a partir de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ se puedan representar gráficamente las funciones definidas de la siguiente manera:
$$\begin{array}{lll} i) f_5(x) = x^2 - 2x - 3, & ii) f_6(x) = x^2 + 2x + 2, & iii) f_7(x) = -x^2 + 4x - 3, \\ iv) f_8(x) = |x^2 - 2x - 3|, & v) f_9(x) = -2x^2 + 2x - \frac{3}{2} & . \end{array}$$

5. Utilizar las representaciones gráficas de funciones apropiadas para hallar los conjuntos soluciones de las siguientes inecuaciones:
$$i) x^2 - 4x - 5 \geq 0, \quad ii) \tfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x} \leq 0, \quad iii) \tfrac{x^2-9}{-x^2-x-2} \geq 0.$$

6. Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso su dominio y su imagen:
$$i) f_1(x) = \Big| -1 + |x| \Big| \qquad ii) f_2(x) = \left| \frac{x+2}{x-1} \right|$$
$$iii) f_3(x) = (-1)^{[x]} \qquad iv) f_4(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 < |x| \leq \pi \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7. Hallar el dominio y la ley de cada una de las funciones compuestas $h = f \circ g$ y $r = g \circ f$ si:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x\, sin\frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = f(x)$.

8. En cada uno de los siguientes ejemplos se pide:

   (a) Demostrar que la función f es inyectiva.
   (b) Simbolizando con g la inversa de la función f, describir su dominio.
   (c) Hallar una expresión para obtener $g(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g.
   (d) A partir de la gráfica de la función f, representar gráficamente la función g.

$$i) f_1(x) = x^2+3 \text{ si } x \leq 0, \qquad ii)\ f_2(x) = \frac{x-2}{x+2} \text{ si } x > -2, \qquad iii)\ f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } 4 < x \end{cases}.$$

9. (a) Graficar las siguientes funciones por corrimientos:

$$i)\ f_1(x) = 2^{|x|}, \qquad ii) f_2(x) = 1 - 2^{-x}, \qquad iii) f_3(x) = \left|1 - 2^{-x+1}\right| - 1,$$

$$iv) f_4(x) = log_2(|x|), \qquad v)\ f_5(x) = \Big| |log_2(x-1)| - 1 \Big|.$$

   (b) Representar gráficamente las siguientes funciones:

$$i)\ g_1(x) = \begin{cases} ln\, x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ e^{-x+1} - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}, \quad ii)\ g_2(x) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \dfrac{x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ y periódica de período 2.}$$

10. Hallar dominio e imagen de cada una de las siguientes funciones y representarlas gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

$$i) f_1(x) = arccos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad ii) f_2(x) = |arccos(2x+1)| \qquad iii) f_3(x) = arctan\left|\frac{x-1}{3}\right|$$

11. Entre todos los pares de números reales x e y tales que $x + y = 1$, hallar aquéllos para los cuales el producto $x.y$ es máximo.

12. Entre todos los rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados tales que uno de sus vértices es el origen de coordenadas y el vértice opuesto está situado sobre el segmento que une los puntos (0,4) y (4,0), hallar el que posea mayor área.

13. Sea S un número real positivo. Pruebe que entre todos los pares de números reales positivos x e y tales que $x + y = S$, la suma $x^2 + y^2$ es mínima cuando $x = y$.

14. Un granjero posee L metros de alambre para cercar un terreno de pastoreo rectangular, adyancente a un muro de piedra. Qué dimensiones deberá dar a dicho terreno para que posea el área máxima?