1 Conceptos matemáticos

En cualquier diccionario pueden encontrarse los siguientes conceptos matemáticos:

axioma : Proposición que se considera “evidente” y se acepta sin requerir demostración previa.

corolario : Es la proposición que se deduce por si sola de lo demostrado anteriormente.

contraejemplo : Caso particular o concreto que indica que una proposición es falsa.

deducción : Acción y efecto de deducir. Razonamiento que, partiendo de hipótesis, conduce a la verdad de una proposición usando reglas de inferencia.

demostración : Acción y efecto de demostrar. Razonamiento que deduce la verdad de una proposición partiendo de suposiciones consideradas como verdaderas o de resultados previamente obtenidos.

demostrar : Probar de manera inequívoca.

ejemplo : Caso particular o concreto de una propiedad o proposición verdadera.

hipótesis : Conjunto de datos a partir del cual se intenta demostrar en forma lógica una nueva proposición.

lema : Proposición preliminar cuya demostración facilita la de un teorema subsiguiente.

principio : Concepto, idea fundamental que sirve de base a un orden determinado de conocimiento o sobre la que se apoya un razonamiento. Proposición que sirve de fundamento a una deducción. Nociones primeras de una ciencia o arte.

probar : Demostrar, evidenciar la verdad de cierta proposición.

problema : Cuestión en que hay algo que averiguar. Proposición dirigida a averiguar el resultado cuando ciertos datos son conocidos. En matemática, un problema es una pregunta sobre objetos y estructuras matemáticas que requiere una explicación y demostración. En ciencias de la computación, un problema es la relación que existe entre un conjunto de instancias y un conjunto de soluciones.

proposición : Enunciado susceptible de ser verdadero o falso.

razonamiento : Acción y efecto de razonar. Serie de conceptos encaminados a demostrar algo.

teorema : Proposición científica que puede demostrarse. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (hipótesis), se afirma una verdad (tesis) que no es evidente por sí misma.

tesis : Conclusión, proposición que se enuncia y se mantiene con argumentos.

2 Elementos básicos del lenguaje matemático

Definición 1 *Una **proposición** es toda expresión del lenguaje para la que tiene sentido afirmar que es verdadera o falsa. Diremos que una proposición tiene valor de verdad V si es verdadera y F si es falsa.*

Ejemplo 1 *1. Buenos Aires es la capital de Argentina (Proposición V).*

2. 1 es un número real negativo (Proposición F).

3. X es un número racional. (No es una proposición).

4. Quién hizo esto? (No es una proposición).

Definición 2 *Sean p y q proposiciones, se definen*

negación *: $\sim p$, se lee "no p". Es una proposición cuyo valor de verdad viene dado en función del valor de verdad de p por la siguiente tabla*

p	$\sim p$
V	F
F	V

conjunción *: $p \wedge q$, "p y q". Es una proposición cuyo valor de verdad viene dado en función de los valores de verdad de p y q por la siguiente tabla*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción de dos proposiciones es verdadera sólo si ambas proposiciones son verdaderas.

disyunción *: $p \vee q$, "p o q". Es una proposición cuyo valor de verdad viene dado en función de los valores de verdad de p y q por la siguiente tabla*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción de dos proposiciones es verdadera si al menos una de ellas es verdadera.

implica *:$p \Rightarrow q$, "p implica q", "si p entonces q, "p es condición suficiente para q", "q es condición necesaria para p. Es una proposición cuyo valor de verdad viene dado en función de los valores de verdad de p y q por la siguiente tabla*

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La implicación $p \Rightarrow q$ es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas y también cuando p es falsa, sea cual sea el valor de verdad de q.

contrarrecíproco : $\sim q \Rightarrow \sim p$, *"no q implica no p". La tabla de verdad asociada a esta proposición está dada por*

p	q	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

reducción al absurdo : $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ *"si p y no q entonces no p". La tabla de verdad asociada a esta proposición está dada por*

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

equivalencia : $p \Leftrightarrow q$, *"p es equivalente a q", "p si y sólo si q", "p es condición suficiente y necesaria para q". Es una proposición definida por* $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$*. La tabla de valores de verdad correspondiente está dada por:*

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La equivalencia $p \Leftrightarrow q$ *es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas o si ambas son falsas.*

Diremos que una proposición es lógicamente equivalente a otra cuando cada una de las asignaciones de valores de verdad a las proposiciones simples que las componen genera el mismo valor de verdad en ambas proposiciones. En otras palabras, **dos expresiones son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son iguales**.

Teniendo en cuenta esto, podemos observar que

> Las proposiciones p implica q ($p \Rightarrow q$), su contrarrecíproca ($\sim q \Rightarrow \sim p$) y la reducción al absurdo ($p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$) SON EQUIVALENTES.

Definición 3 *Diremos que $p(x)$ es un* ***esquema proposicional*** *en la* ***variable*** *x si existe al menos una sustitución de x por una constante que la transforma en una proposición.*

Ejemplo 2 *Si $p(x)$ es el esquema "x es un número racional", entonces $p(1)$ y $p(2/3)$ son verdaderas, mientras que $p(\sqrt{2})$ y $p(\pi)$ son falsas.*

Observación 1 *Los cuantificadores "para todo" $\forall$ y "existe" $\exists$ serán utilizados a menudo y nos sirven, entre otras cosas, para transformar esquemas proposicionales en proposiciones. Por ejemplo:*

Sea $p(x)$ un esquema proposicional en un dominio D. Entonces si escribimos:

1. *$\forall$ x: $p(x)$, significa que TODOS los elementos de D tienen la propiedad p.*
2. *$\exists$ x: $p(x)$, significa que EXISTE ALGUN elemento en D que tiene la propiedad p. $\forall$ x: $\sim p(x)$, significa que NINGUN elemento en D tiene la propiedad p. $\exists$ x: $p(x)$, significa que EXISTE ALGUN elemento en D que no tiene la propiedad p.*

3 El problema fundamental de la matemática: $p \Rightarrow q$

Dadas dos proposiciones p y q, un problema fundamental en matemática es el de demostrar que si p es verdadera, entonces q es verdadera. La proposición p se llamará **hipótesis**, y la proposición q **tesis**.

Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. Debemos tener en cuenta que demostrar que $p \Rightarrow q$ no es un intento de verificar si p y q son verdaderas, sino demostrar que q es una consecuencia lógica de haber supuesto que p es verdadera.

A continuación, presentaremos tres posibles (no son los únicos!) caminos a seguir para hacer una demostración.

1. **Método Progresivo-Regresivo:** Este método se basa en el hecho de preguntarnos: ¿Qué tendría que pasar para que q sea verdadera? De ahí surge una nueva proposición r_1 (podrían ser varias las respuestas, pero para simplificar vamos a suponer que es sólo una) que verifica $r_1 \Rightarrow q$ es V. Nuevamente, nos preguntamos qué debe ocurrir para que r_1 sea verdadera con el objetivo de tener una proposición r_2 de manera que $r_2 \Rightarrow r_1$ sea V y así sucesivamente hasta llegar a una r_n que verifique que $p \Rightarrow r_n$ es V.

$$p \Rightarrow r_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow r_1 \Rightarrow q$$

   Ejercicio: Demostrar la siguiente proposición: *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n es par, entonces n^2 es par.*

2. **Método Contrarrecíproco:** Consiste en demostrar la proposición contrarrecíproca a la dada que, como vimos, son equivalentes. En este método, aplicaremos el método progresivo-regresivo para mostrar que $\sim q \Rightarrow \sim p$.
   Ejercicio: Demostrar la siguiente proposición: *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par, entonces n es par.*

3. **Método por Contradicción**: Si analizamso la tabla de verdad de la proposición $p \Rightarrow q$, el único caso donde una implicación es falsa se daba cuando p (el antecedente es verdadero) y q (el consecuente) es falso. este método consiste en mostrar que esa situación **no puede** producirse. No sabemos de antemano cuál es la contradiccioón a la que queremos llegar, por lo tanto, un vez supuestas que p y $\sim q$ son verdaderas, utilizando el método progresivo trataremos de obtener alguna. En general este método se utiliza cuando la proposición $\sim q$ **nos da alguna información útil**.

   Ejercicio: Demostrar la siguiente proposición:*Sean $s, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a > b$. Entonces: $ac \leq bc$* $\Rightarrow c \leq 0$.

   Observemos que la **ventaja** del **método por contradicción** es que partimos con **dos hipótesis**, pero la **desventaja** es que no sabemos a priori, a qué contradicción llegar.
   En cambio, en el **método del contrarrecíproco**, partimos con **una sóla hipótesis** ($\sim q$) y sabemos que queremos llegar a $\sim p$.