

# 1. Matrices

En lo que sigue supondremos que  $\mathbb{F}$  es el cuerpo de los números racionales, reales o complejos. O sea,  $\mathbb{F}$  será  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.1.** Una *matriz*  $A$  de tamaño  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{F}$  es una función

$$A : \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{F},$$

en donde  $\llbracket 1, m \rrbracket = \{1, 2, \dots, m\}$  y  $\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$ . El conjunto de todas las matrices  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{F}$  se denotará por  $\mathbb{F}^{m \times n}$ . En algunos libros se denota el conjunto de matrices  $m \times n$  también por  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$  o  $M(m, n, \mathbb{F})$ .

Es común representar a una matriz  $A : \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{F}$  como un arreglo rectangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en donde  $a_{ij} = A(i, j)$  son los llamados coeficientes de la matriz  $A$ . También se dice que  $A$  tiene  $m$  filas y  $n$  columnas.

*Notación.* Otras notaciones frecuentes, y que a menudo emplearemos son las siguientes. Una matriz  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  se denota abreviadamente como  $A = (a_{ij})$  o  $A = (a_{ij})_{ij}$ , o cuando hay dudas sobre el tamaño de la matriz se suele escribir  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ , en donde los coeficientes de la matriz  $A$  son  $a_{ij}$ . Otra notación muy frecuente es la que nombra los coeficientes de la matriz  $A$  con la misma letra (en mayúscula en este caso) indicando con un subíndice la posición fila-columna, es decir,  $A = (A_{ij})$ . Esta notación resulta muy útil cuando la matriz en cuestión no está denotada con una letra del alfabeto latino.

Diremos que dos matrices  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  son *iguales* si tienen la misma cantidad de filas, la misma cantidad de columnas y  $a_{ij} = b_{ij}$  para todos  $i, j$ .

**Ejemplo 1.2.** Observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En efecto, si bien ambas matrices nos dan la “misma información” (pues todo coeficiente de una aparece en alguna posición de la otra), la primera matriz es de tamaño  $2 \times 3$ , en tanto que la segunda es  $3 \times 2$ . Más generalmente, si  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ , con  $n \neq m$ , entonces  $A \neq B$ . Este hecho cobrará importancia en breve, cuando definamos la multiplicación de matrices.

**Ejemplo 1.3.**  $\mathbb{F}^{1 \times 1} = \mathbb{F}$ , o sea, una matriz  $1 \times 1$  es un escalar. A decir verdad, una matriz  $1 \times 1$  es una función  $A : \{1\} \times \{1\} \rightarrow \mathbb{F}$ , pero en estas notas identificaremos  $A$  con su imagen, o sea  $A = A(1, 1) = a_{11}$ .

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la matriz  $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$  dada por  $a_{ij} = i + j$ . Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observar que en esta matriz las antidiagonales (es decir las líneas que se pueden trazar en dirección sudoeste) son constantes. ¿Se puede generalizar esto?

**Ejemplo-Definición 1.5.** Diremos que  $v$  es un *vector fila* de tamaño  $n$  si  $v \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ , o sea

$$v = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n),$$

en tanto que  $v$  se dirá un *vector columna* de tamaño  $m$  si  $v \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ , o sea

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo-Definición 1.6.** Una matriz  $A$  se dice *cuadrada* si tiene la misma cantidad de filas y columnas. Es decir, si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  para algún  $n$ . En tal caso, el *vector diagonal* de  $A$  es

$$\text{diag}(A) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  se dice:

- *triangular superior* si  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ ;
- *triangular superior estricta* si  $a_{ij} = 0$  para  $i \geq j$ ;
- *triangular inferior* si  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ ;
- *triangular inferior estricta* si  $a_{ij} = 0$  para  $i \leq j$ ;
- *diagonal* si  $A$  es triangular superior y triangular inferior.

Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

son triangular superior, triangular superior estricta, triangular inferior y diagonal, respectivamente.

**Ejemplo-Definición 1.7.** La *matriz nula*  $0 = 0_{m \times n} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  es la matriz de tamaño  $m \times n$  que tiene todas sus entradas iguales a cero, o sea,

$$0_{m \times n} = \underbrace{\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{n \text{ columnas}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \right\} m \text{ filas}$$

Si bien hemos abusado de la notación denotando por  $0$  a la matriz nula, con el mismo símbolo que usamos para denotar el elemento nulo en  $\mathbb{F}$ , no debemos confundir estos conceptos. El significado de  $0$  debería ser claro del contexto. De todas formas, cuando se presente alguna duda, preferiremos la notación  $0_{m \times n}$ .

**Ejemplo-Definición 1.8.** La *matriz identidad* de orden  $n$  es la matriz  $I = I_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $I_{ij} = \delta_{ij}$ , en donde  $\delta_{ij}$  es la llamada delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Es decir,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz diagonal con  $\text{diag}(I) = (1, 1, \dots, 1)$ .

## 1.1. Operaciones entre matrices

La multiplicación de la matriz  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  por el escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$  se define como la matriz  $C = \alpha A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  dada por  $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ . Por ejemplo,

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , la suma de  $A$  con  $B$  es la matriz  $C = A + B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  dada por  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \\ -5 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Observar que solo se pueden sumar matrices del mismo tamaño.

**Ejercicio 1.9.** Dados  $A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ , verificar las siguientes propiedades.

- $0A = 0_{m \times n}$ .
- $\alpha 0_{m \times n} = 0_{m \times n}$ .
- La suma de matrices es asociativa, o sea  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ .
- $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ , es decir, la matriz nula es el elemento neutro para la suma de matrices.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ , o sea, la suma en  $\mathbb{F}$  es distributiva con respecto a la multiplicación de una matriz por un escalar.

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ , o sea, la multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la suma de matrices.

A continuación definiremos la multiplicación de matrices. Intuitivamente, uno querría que la multiplicación de matrices respetara las formas que ya tenemos de multiplicar vectores, es decir, el producto escalar y el producto de sus coordenadas. Recordemos que tenemos dos formas matriciales de pensar un vector en  $\mathbb{F}^n$ : a saber como un vector fila o como un vector columna. La multiplicación de matrices impone ciertos requerimientos al tamaño de las matrices para poder calcular el producto, pero bajo tales condiciones serán validas las siguientes identidades, por ejemplo para  $n = 3$ , para vectores fila y vectores columna:

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{producto escalar}),$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{producto de coordenadas}).$$

Notar que en el primer caso, el producto de una matriz  $1 \times 3$  por una matriz  $3 \times 1$  nos da una matriz  $1 \times 1$ , en tanto que en el segundo caso, el producto de una matriz  $3 \times 1$  por una matriz  $1 \times 3$  nos da una matriz  $3 \times 3$ .

**Definición 1.10.** Si  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$  definimos el *producto* de  $A$  con  $B$  como la matriz  $C = AB \in \mathbb{F}^{m \times p}$  dada por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

En otras palabras, el lugar  $(AB)_{ij}$  está dado por el producto escalar entre la  $i$ -ésima fila de  $A$  y la  $j$ -ésima columna de  $B$ .

**Ejemplo 1.11.** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Observar que como  $A$  es  $2 \times 3$  y  $B$  es  $3 \times 4$  está definido el producto  $AB$  (¡y será una matriz  $2 \times 4$ !):

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -1 \\ 30 & 18 & 7 & 29 \end{pmatrix}$$

Una forma sencilla para recordar la fórmula del producto de matrices es la siguiente: se traza una cruz y se disponen los coeficientes de la matriz  $A$  en el cuadrante inferior izquierdo, y los coeficientes de la matriz  $B$  en el cuadrante superior derecho. Para calcular el coeficiente  $(AB)_{ij}$ , se calcula el producto escalar entre la fila  $i$  de  $A$  y la columna  $j$  de  $B$ . Observar que si uno traza una línea horizontal según la fila  $i$  de  $A$  y una línea vertical



Observar que los dos productos mencionados en el teorema están bien definidos. En efecto como  $A$  es  $m \times n$  y  $BC$  es  $n \times q$ , entonces  $A(BC)$  es  $m \times q$ . Asimismo, como  $AB$  es  $m \times p$  y  $C$  es  $p \times q$ ,  $(AB)C$  también es  $m \times q$ .

*Demostración.* La prueba es por cálculo directo usando la definición. Sean  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq q$ . Entonces, por un lado

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \sum_{\ell=1}^p B_{k\ell}C_{\ell j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

y por el otro

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^p (AB)_{i\ell}C_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p A_{ik}B_{k\ell}C_{\ell j}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como (1.1) coincide con (1.2) para todos  $i, j$ , concluimos que  $A(BC) = (AB)C$ .  $\square$

El siguiente teorema dice que valen las leyes distributivas para el producto de matrices con respecto a la suma.

**Teorema 1.14.** 1. Si  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  y  $B, C \in \mathbb{F}^{n \times p}$ , entonces

$$A(B + C) = AB + AC.$$

2. Si  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  y  $C \in \mathbb{F}^{n \times p}$ , entonces

$$(A + B)C = AC + BC.$$

*Demostración.* Para probar 1 observamos que para  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq p$ ,

$$\begin{aligned} (A(B + C))_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^n A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= (AB + AC)_{ij}. \end{aligned}$$

La parte 2 queda como ejercicio.  $\square$

**Teorema 1.15.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , entonces

$$I_m A = A I_n = A.$$

En particular, la matriz identidad  $I_n$  es el elemento neutro para el producto en  $\mathbb{F}^{n \times n}$ .

*Demostración.* Recordemos que  $(I_m)_{ij} = \delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Luego

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^m (I_m)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij},$$

de donde sigue que  $I_m A = A$ . Probar como ejercicio que  $AI_n = A$ .  $\square$

**Ejemplo 1.16.** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y calculemos las potencias sucesivas de  $A$ . Es decir,  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AA^2 = AAA$ ,  $A^4 = AA^3 = A^2A^2 = AAAA$ , etc. En efecto,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ A^4 &= AA^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A^5 &= AA^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El lector quizás ya pueda intuir que el resultado general es

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

en donde los números  $F_n$  son los números de la sucesión de Fibonacci, dada por  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  y  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  para  $n \geq 1$ . En efecto, probemos la fórmula (1.3) por inducción. Es claro que (1.3) vale para  $n = 1$ , pues  $A^1 = A$  (de hecho, ya lo probamos para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Supongamos que dicha fórmula vale para un cierto  $n \geq 2$  y verifiquemos el resultado para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo cual la fórmula (1.3) vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Hay otro tipo de operación que se puede aplicar sobre una matriz, la cual no involucra operaciones algebraicas (como sumar o multiplicar) si no intercambios de lugar en los coeficientes de la matriz.

**Definición 1.17.** Dada  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  se define la *matriz transpuesta* de  $A$ , como la matriz  $A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}$  dada por

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}.$$

Es decir,  $A^t$  es la matriz cuyas columnas son las filas de  $A$ .

**Ejemplo 1.18.** Notemos si una matriz tiene tamaño, digamos,  $2 \times 3$  entonces su transpuesta tendrá tamaño  $3 \times 2$ . Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 1.19.** Si  $A$  es una matriz diagonal, entonces  $A^t = A$ .

**Proposición 1.20.** Sean  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Entonces:

1.  $(A^t)^t = A$ ;
2.  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ ;
3.  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .

*Demostración.* Observar que para todos  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  valen

$$((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij},$$

de donde sigue que  $(A^t)^t = A$ ;

$$((\alpha A)^t)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha (A^t)_{ij} = (\alpha A^t)_{ij},$$

de donde sigue que  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ ; y

$$((A + B)^t)_{ij} = (A + B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij},$$

de donde sigue que  $(A + B)^t = A^t + B^t$ . □

Notar que la transposición no es una operación multiplicativa, es decir, no vale en general que  $(AB)^t = A^t B^t$ , de hecho, quizás ni siquiera tenga sentido el producto del lado derecho de esta igualdad. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado que relaciona la transposición con el producto de matrices.

**Proposición 1.21.** Si  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$  entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

*Demostración.* Por un cálculo directo se tiene que

$$\begin{aligned} ((AB)^t)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij} \end{aligned}$$

para todos  $1 \leq i \leq q$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Por tanto,  $(AB)^t = B^t A^t$ . □



**Definición 1.22.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . Decimos que  $A$  es:

- *simétrica* si  $A^t = A$ ;
- *antisimétrica* si  $A^t = -A$ .

**Ejemplo 1.23.** La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

es simétrica,  $A^t = A$ , en tanto que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

es antisimétrica,  $B^t = -B$ . Observar que “simetría” o “antisimetría” para matrices, significa simetría o antisimetría con respecto a la diagonal. En particular, una matriz simétrica queda determinada por los coeficientes ubicados de la diagonal para arriba.

**Ejemplo 1.24.** Si  $A$  es antisimétrica entonces  $\text{diag}(A) = (0, 0, \dots, 0)$ .

**Proposición 1.25.** Toda matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. Es decir,

$$A = A_{\text{sim}} + A_{\text{anti}},$$

con  $(A_{\text{sim}})^t = A_{\text{sim}}$  y  $(A_{\text{anti}})^t = -A_{\text{anti}}$ .

*Demostración.* Observemos que

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Luego, si llamamos

$$A_{\text{sim}} = \frac{1}{2}(A + A^t), \quad A_{\text{anti}} = \frac{1}{2}(A - A^t),$$

entonces por la Proposición 1.20, se tiene que

$$(A_{\text{sim}})^t = \left( \frac{1}{2}(A + A^t) \right)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = A_{\text{sim}}$$

y

$$(A_{\text{anti}})^t = \left( \frac{1}{2}(A - A^t) \right)^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -A_{\text{anti}},$$

como se quería probar. □

**Ejercicio 1.26.** Probar que la descomposición de la Proposición 1.25 es única. Es decir, si  $A = A' + A''$  con  $(A')^t = A'$  y  $(A'')^t = -A''$ , entonces  $A' = A_{\text{sim}}$  y  $A'' = A_{\text{anti}}$ .

**Definición 1.27.** Dada  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , se define la *traza* de  $A$  como

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}.$$

**Ejemplo 1.28.** Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\operatorname{tr} A = 2 + 7 - 9 = 0.$$

**Ejercicio 1.29.** Dados  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}$ , probar que:

1.  $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ ;
2.  $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ ;
3.  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ .

**Proposición 1.30.** Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , entonces

$$\operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2.$$

*Demostración.* Observemos que

$$(AA^t)_{ii} = \sum_{j=1}^n A_{ij}(A^t)_{ji} = \sum_{j=1}^n A_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^2,$$

de donde se obtiene que

$$\operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^n (AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2. \quad \square$$

*Comentario.* 1. Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , puede pensarse en el número  $\operatorname{tr}(AA^t)$  como el “módulo” al cuadrado de la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , pues este número se calcula sumando los cuadrados de todos los coeficientes de la matriz  $A$ . Esto introduce una noción geométrica de distancia en el conjunto  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , es decir, la distancia entre dos matrices  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  se define como el módulo de la diferencia  $B - A$ ,

$$\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{tr}((B - A)(B - A)^t)^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de esta distancia, es posible definir muchas otras nociones geométricas.

2. El conjunto de todas las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que

$$\text{tr } A = \text{const.}$$

puede pensarse como un “hiperplano” en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , pues dichas matrices satisfacen una especie de “ecuación general del plano”: una ecuación lineal generalizada a  $n^2$  variables.

**Ejemplo 1.31.** El hiperplano de todas las matrices  $2 \times 2$  de traza cero, con coeficientes reales, está dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : x + w = 0 \right\}.$$

## 2. Determinantes

Recordemos que para  $n \in \mathbb{N}$ , se denota por  $\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$  el intervalo de todos los enteros comprendidos entre 1 y  $n$ .

**Definición 2.1.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , denotaremos por

$$S_n = \{ \sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket : \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

el conjunto de permutaciones de  $n$  elementos.

*Observación 2.2.* Ya hemos probado los siguientes hechos.

- Hay  $n!$  permutaciones de  $n$  elementos, o sea  $|S_n| = n!$ .
- Si  $\sigma, \tau \in S_n$  entonces  $\sigma \circ \tau \in S_n$ , en donde  $\sigma \circ \tau$  es la *composición* de  $\sigma$  con  $\tau$  y está definida por  $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$  para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- La función identidad  $\text{id} : S_n \rightarrow S_n$  se comporta como el “elemento neutro” de  $S_n$  con respecto a la operación composición, es decir,

$$\text{id} \circ \sigma = \sigma \circ \text{id} = \sigma$$

para toda  $\sigma \in S_n$ .

- Toda  $\sigma \in S_n$  tiene una inversa, es decir, existe una permutación  $\sigma^{-1} \in S_n$  tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \text{id}.$$

- Se puede identificar una permutación  $\sigma \in S_n$  con una  $n$ -upla de números entre 1 y  $n$ , todos distintos,

$$\sigma \longleftrightarrow (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)).$$

Más aún, en la presente unidad abusaremos de la notación escribiendo

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)).$$

Por ejemplo, la  $n$ -upla  $(1, 2, \dots, n)$  representa la permutación identidad, en tanto que  $(2, 1, 3, 4, \dots, n)$  representa la permutación que intercambia el 1 con el 2 y deja fijos los demás elementos.

Las permutaciones que intercambian solamente dos elementos forman una familia muy importante y llevan nombre propio.

**Definición 2.3.** Una *trasposición* es una permutación que intercambia sólo dos elementos. O sea,  $\tau \in S_n$  es una trasposición si existen  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $i \neq j$ , tales que

$$\sigma(k) = \begin{cases} j & \text{si } k = i, \\ i & \text{si } k = j, \\ k & \text{si } k \neq i, j. \end{cases}$$

*Notación.* Denotaremos por  $\tau_{i,j}$  la trasposición que intercambia  $i$  con  $j$ . Observemos que esta notación es ambigua pues, por ejemplo,  $\tau_{1,2}$  representa permutaciones distintas según consideremos  $\tau_{1,2} \in S_2$  o  $\tau_{1,2} \in S_3$ . En el primer caso  $\tau_{1,2} = (2, 1)$  y en el segundo  $\tau_{1,2} = (2, 1, 3)$ . Por ende, para indicar una trasposición  $\tau_{i,j}$  también deberíamos indicar el  $n$  tal que  $\tau_{i,j} \in S_n$ . Sin embargo, en lo que sigue siempre podremos deducir quién es  $n$  a partir del contexto. Observemos que para  $i < j$ , la trasposición que intercambia  $i$  con  $j$  se representa mediante la  $n$ -upla

$$\tau_{i,j} = (1, \dots, i-1, j, i+1, \dots, j-1, i, j+1, \dots, n).$$

*Observación 2.4.* Es importante notar que si  $\tau$  es una trasposición, entonces  $\tau \circ \tau = \text{id}$ , o sea,  $\tau$  es su propia inversa,  $\tau = \tau^{-1}$ .

Usando trasposiciones, uno puede calcular fácilmente la inversa de una permutación arbitraria  $\sigma \in S_n$ . En efecto, simplemente debemos reordenar de menor a mayor la  $n$ -upla  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$  intercambiando sólo dos elementos en cada paso.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\sigma \in S_6$  la permutación representada por la 6-upla  $\sigma = (2, 4, 3, 1, 6, 5)$ . En un primer paso podemos intercambiar 1 con 2 para obtener la 6-upla  $(1, 4, 3, 2, 6, 5)$ , o más formalmente

$$\tau_{1,2} \circ \sigma = (1, 4, 3, 2, 6, 5).$$

Luego podemos intercambiar 2 con 4 para obtener

$$\tau_{2,4} \circ \tau_{1,2} \circ \sigma = (1, 2, 3, 4, 6, 5).$$

Finalmente, para llegar a la identidad, debemos intercambiar 5 con 6,

$$\tau_{5,6} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,2} \circ \sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6) = \text{id}.$$

Por lo tanto,

$$\sigma^{-1} = \tau_{5,6} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,2},$$

de donde se desprende que  $\sigma = (\tau_{1,2})^{-1} \circ (\tau_{2,4})^{-1} \circ (\tau_{5,6})^{-1}$  y como cada trasposición es su propia inversa, se obtiene que

$$\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{5,6},$$

es decir, logramos escribir  $\sigma$  como una composición de trasposiciones. Este es un hecho general, como lo refleja el siguiente teorema.

**Teorema 2.6.** 1. Toda  $\sigma \in S_n$  se puede escribir como una composición de trasposiciones,

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k,$$

con  $\tau_i$  trasposición.

2. Dada  $\sigma \in S_n$ , la cantidad  $k$  de trasposiciones  $\tau_i$  usadas en una descomposición  $\sigma$  como la dada en el ítem anterior es siempre par o siempre impar.

**Ejemplo 2.7.** Consideremos  $\sigma = (2, 4, 3, 1) \in S_4$ . Razonando como en el Ejemplo 2.5 obtenemos que

$$\begin{aligned}\tau_{1,2} \circ \sigma &= (1, 4, 3, 2) \\ \tau_{2,4} \circ \tau_{1,2} \circ \sigma &= (1, 2, 3, 4),\end{aligned}$$

de donde  $\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,4}$  y logramos escribir  $\sigma$  como una composición de  $k = 2$  trasposiciones. Obviamente esta no es la única manera de reordenar de menor a mayor los números  $(2, 4, 3, 1)$ , uno podría hacer también

$$\begin{aligned}\tau_{1,3} \circ \sigma &= (2, 4, 1, 3), \\ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \sigma &= (2, 1, 4, 3), \\ \tau_{1,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \sigma &= (1, 2, 4, 3), \\ \tau_{3,4} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \sigma &= (1, 2, 3, 4),\end{aligned}$$

de donde sigue que  $\sigma$  también se puede escribir como la composición  $\sigma = \tau_{1,3} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4}$  usando  $k = 4$  trasposiciones. Notemos que en ambos casos necesitamos una cantidad par de trasposiciones para descomponer  $\sigma$ .

**Definición 2.8.** El *signo* de una permutación  $\sigma \in S_n$  se define por

$$\text{sg}(\sigma) = (-1)^k,$$

en donde  $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$  con  $\tau_i$  trasposición (notar el signo está bien definido por el Teorema 2.6). Diremos que  $\sigma$  es

- una permutación *par* si  $\text{sg}(\sigma) = 1$ ,
- o una permutación *impar* si  $\text{sg}(\sigma) = -1$ .

**Teorema 2.9.** 1.  $\text{sg}(\text{id}) = 1$ .

2.  $\text{sg}(\sigma \circ \tau) = \text{sg}(\sigma) \text{sg}(\tau)$  para todas  $\sigma, \tau \in S_n$ .

3.  $\text{sg}(\sigma^{-1}) = \text{sg}(\sigma)^{-1} = \text{sg}(\sigma)$  para toda  $\sigma \in S_n$ .

*Demostración.* La primera parte es trivial. Para la segunda, usando el Teorema 2.6, podemos escribir  $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$  y  $\tau = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$  con  $\sigma_i, \tau_j$  trasposiciones. Luego

$$\sigma \circ \tau = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$$

es composición de  $k + \ell$  trasposiciones y por consiguiente

$$\text{sg}(\sigma \circ \tau) = (-1)^{k+\ell} = (-1)^k (-1)^\ell = \text{sg}(\sigma) \text{sg}(\tau).$$

Para probar la tercera parte podemos usar lo que acabamos de demostrar. En efecto, como  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id}$ , sigue que

$$1 = \text{sg}(\text{id}) = \text{sg}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \text{sg}(\sigma) \text{sg}(\sigma^{-1}),$$

con lo cual

$$\text{sg}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\text{sg}(\sigma)} = \text{sg}(\sigma)^{-1}.$$

Observar que si  $\text{sg}(\sigma) = 1$ , entonces  $\text{sg}(\sigma^{-1}) = 1/1 = 1$  y si  $\text{sg}(\sigma) = -1$ , entonces  $\text{sg}(\sigma^{-1}) = 1/(-1) = -1$ . En cualquiera de los dos casos vale  $\text{sg}(\sigma) = \text{sg}(\sigma^{-1})$ .  $\square$

Con estos preliminares sobre permutaciones estamos ya en condiciones de definir el determinante de una matriz cuadrada.

**Definición 2.10.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , el *determinante* de  $A$  se define como

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}. \quad (2.1)$$

En otras palabras, para calcular el determinante de  $A$  hay que sumar todos los posibles factores que se pueden armar con coeficientes de  $A$ , tomando un elemento en cada fila y cada columna, en donde el factor  $A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$  debe ir multiplicado por el signo de la permutación de las columnas  $\sigma$ .

Es común la notación que indica el determinante de la matriz  $A = (a_{ij})$  utilizando barras verticales:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A continuación estudiamos algunos casos particulares que ayudarán a clarificar la definición del determinante.

Para el caso de una matriz  $A = (a) \in \mathbb{F}^{1 \times 1}$  tenemos que  $S_1 = \{\text{id}\}$  y por ende

$$\det A = a.$$

Cuando  $n = 2$  tenemos que  $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ , en donde  $\text{sg}((1, 2)) = \text{sg}(\text{id}) = 1$  y  $\text{sg}((2, 1)) = -1$ , pues  $(2, 1) = \tau_{1,2}$  es una trasposición. Luego, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_2} \text{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \text{sg}((1, 2)) a_{11} a_{22} + \text{sg}((2, 1)) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

Esta fórmula a veces se escribe como

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Estudiemos ahora el caso de matrices  $3 \times 3$ . Notemos que para  $n = 3$ , la suma (2.1) tiene 6 sumandos pues  $|S_3| = 3! = 6$ . Más precisamente,

$$S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Pero para calcular el determinante de una matriz  $3 \times 3$  no solo debemos conocer todas las permutaciones de 3 elementos, sino también sus signos. Para hacer esto notemos que:

- $(1, 2, 3) = \text{id} \Rightarrow \text{sg}((1, 2, 3)) = 1,$
- $(1, 3, 2) = \tau_{2,3} \Rightarrow \text{sg}((1, 3, 2)) = -1,$
- $(2, 1, 3) = \tau_{1,2} \Rightarrow \text{sg}((2, 1, 3)) = -1,$
- $(2, 3, 1) = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} \Rightarrow \text{sg}((2, 3, 1)) = 1,$
- $(3, 1, 2) = \tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \Rightarrow \text{sg}((3, 1, 2)) = 1,$
- $(3, 2, 1) = \tau_{1,3} \Rightarrow \text{sg}((3, 2, 1)) = -1.$

Luego, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \text{sg}((1, 2, 3)) a_{11} a_{22} a_{33} + \text{sg}((1, 3, 2)) a_{11} a_{23} a_{32} + \text{sg}((2, 1, 3)) a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + \text{sg}((2, 3, 1)) a_{12} a_{23} a_{31} + \text{sg}((3, 1, 2)) a_{13} a_{21} a_{32} + \text{sg}((3, 2, 1)) a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned}$$

Remplazando los signos de las permutaciones por los calculados más arriba y reordenando los sumandos, se obtiene la fórmula

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}. \quad (2.2)$$

*Nota 2.11.* El determinante de una matriz  $3 \times 3$  puede calcularse mediante una regla nemotécnica llama *regla de Sarrus*. El procedimiento es el siguiente: primero hay que disponer un arreglo de cinco filas que consiste de las tres filas de la matriz  $A$ , agregando como cuarta y quinta filas la primera y la segunda fila de  $A$  respectivamente. O sea,

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ - \swarrow & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \searrow & + \\ - \swarrow & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \searrow & + \\ - \swarrow & & & & & \searrow & + \end{array}$$

y luego se suman los productos de los elementos en las diagonales (de izquierda a derecha en dirección sudeste) y se restan los productos de los elementos en las antidiagonales (de derecha a izquierda en dirección sudoeste). Así se obtiene

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Observar que esta fórmula coincide, reordenando sumandos e intercambiando factores, con la que dedujimos en (2.2).

A continuación derivamos propiedades importantes de la función determinante.

**Proposición 2.12.** *Si  $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$  es la matriz identidad, entonces  $\det I = 1$ .*

*Demostración.* Por definición tenemos que

$$\det I = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n I_{i\sigma(i)},$$

pero  $I_{i\sigma(i)} \neq 0$  si y sólo si  $\sigma(i) = i$ , y en tal caso se tiene  $I_{ii} = 1$ . Luego, la suma anterior tiene un único sumando no nulo, el correspondiente a  $\sigma = \text{id}$ , por tanto

$$\det I = \text{sg}(\text{id}) \prod_{i=1}^n I_{ii} = 1. \quad \square$$

**Ejercicio 2.13.** Usando la misma idea que en la demostración de la Proposición 2.12, probar que si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  es una matriz diagonal entonces  $\det A = A_{11}A_{22} \cdots A_{nn}$ .

**Proposición 2.14.** *Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  entonces,*

$$\det A = \det A^t.$$

*Demostración.* Para calcular  $\det A$  se deben sumar todos los posibles factores que uno puede armar eligiendo un elemento en cada fila de  $A$  y cubriendo todas las columnas, multiplicando cada factor por el signo de la permutación usada para elegir las columnas. Es claro que armar un factor que tenga un elemento de cada fila y cada columna es lo mismo que armar un factor que tenga un elemento de cada columna y cada fila. Más aún, la permutación de las columnas que usamos para armar un factor dado, tiene el mismo signo que la permutación de las filas con respecto a esas columnas. Más precisamente,

$$\begin{aligned} \text{sg}(\sigma)A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} &= \text{sg}(\sigma^{-1})A_{\sigma^{-1}(1)1}A_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots A_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \text{sg}(\sigma^{-1})(A^t)_{1\sigma^{-1}(1)}(A^t)_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots (A^t)_{n\sigma^{-1}(n)}. \end{aligned}$$

Luego

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sg}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n (A^t)_{i\sigma^{-1}(i)} = \det A^t. \quad \square$$

**Proposición 2.15.** *Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tiene dos columnas (o filas) iguales, entonces*

$$\det A = 0.$$



*Demostración.* Supongamos primero que  $A$  tiene dos columnas iguales, digamos la columna  $k$  es igual a la columna  $j$  con  $k < j$ . Esto quiere decir que  $a_{ik} = a_{ij}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Dada  $\sigma \in S_n$ , sea  $\tilde{\sigma} = \tau_{k,j} \circ \sigma$ . Se tiene que

$$A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} = A_{1\tilde{\sigma}(1)}A_{2\tilde{\sigma}(2)} \cdots A_{n\tilde{\sigma}(n)},$$

pues  $\sigma(i) = k$  implica  $\tilde{\sigma}(i) = j$  y por tanto  $A_{i\sigma(i)} = A_{i\tilde{\sigma}(i)}$ . Análogamente  $A_{j\sigma(j)} = A_{j\tilde{\sigma}(j)}$  y  $A_{k\sigma(k)} = A_{k\tilde{\sigma}(k)}$  para  $k \neq i, j$ . Además

$$\text{sg}(\tilde{\sigma}) = \text{sg}(\tau_{k,j} \circ \sigma) = \text{sg}(\tau_{k,j}) \text{sg}(\sigma) = -\text{sg}(\sigma).$$

Por ende

$$\text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} + \text{sg}(\tilde{\sigma}) \prod_{i=1}^n A_{i\tilde{\sigma}(i)} = 0.$$

Así, los sumandos en la fórmula

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}$$

se van cancelando de a pares, de donde se concluye que  $\det A = 0$ .

Finalmente, si  $A$  tiene dos filas iguales, entonces  $A^t$  tiene dos columnas iguales. Por lo que acabamos de ver, y usando la Proposición 2.14, tenemos que  $\det A = \det A^t = 0$ .  $\square$

*Notación.* En lo que sigue usaremos la siguiente convención para describir una matriz en términos de sus columnas o filas. En primer lugar si  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{F}^{n \times 1}$  son vectores columna, denotaremos por

$$A = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n)$$

la matriz cuyas columnas son  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . En tanto que si  $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathbb{F}^{1 \times n}$  son vectores fila, denotaremos por

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

la matriz cuyas filas son  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

**Proposición 2.16.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{n \times 1}$  vectores columna y sea  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Entonces

$$\det(A_1 \ \cdots \ \alpha A_k \ \cdots \ A_n) = \alpha \det(A_1 \ \cdots \ A_k \ \cdots \ A_n).$$

En otras palabras, si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y  $A'$  es la matriz que se obtiene de  $A$  multiplicando la  $k$ -ésima columna por  $\alpha$ , entonces

$$\det A' = \alpha \det A.$$

*Demostración.* Observemos que

$$A'_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j \neq k \\ \alpha A_{ik} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Luego, dada  $\sigma \in S_n$ , se tiene

$$A'_{1\sigma(1)} A'_{2\sigma(2)} \cdots A'_{n\sigma(n)} = \alpha A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

y por tanto

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A'_{i\sigma(i)} = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} = \alpha \det A. \quad \square$$

**Ejercicio 2.17.** Usando la proposición anterior, probar que:

1. si  $\alpha \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , entonces  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ ;
2. si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tiene una columna (o fila) nula, entonces  $\det A = 0$ .

**Corolario 2.18.** Sean  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{1 \times n}$  vectores fila y sea  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Entonces

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y  $A'$  es la matriz que se obtiene de  $A$  multiplicando la  $k$ -ésima fila por  $\alpha$ , entonces

$$\det A' = \alpha \det A.$$

*Demostración.* Ejercicio (aplicar la Proposición 2.16 a la matriz  $A^t$ ). □

**Ejemplo 2.19.** Se pueden usar los resultados anterior para calcular el determinante de una matriz diagonal sin usar la definición:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = ab \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = abc.$$

**Proposición 2.20.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y sean  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{n \times 1}$  las columnas de  $A$ . Supongamos que  $A_k = B_k + C_k$  y sean las matrices

$$B = (A_1 \cdots A_{k-1} B_k A_{k+1} \cdots A_n), \quad C = (A_1 \cdots A_{k-1} C_k A_{k+1} \cdots A_n).$$

Entonces

$$\det A = \det B + \det C.$$

*Demostración.* Denotemos

$$B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ \vdots \\ C_{nk} \end{pmatrix},$$

de donde sigue que

$$B_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j \neq k \\ B_{ik} & \text{si } j = k, \end{cases} \quad C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j \neq k \\ C_{ik} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Luego, si  $\sigma \in S_n$ , tenemos que

$$A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} = B_{1\sigma(1)}B_{2\sigma(2)} \cdots B_{n\sigma(n)} + C_{1\sigma(1)}C_{2\sigma(2)} \cdots C_{n\sigma(n)}$$

pues siempre existe un  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tal que  $\sigma(\ell) = k$ , y así  $A_{\ell\sigma(\ell)} = B_{\ell\sigma(\ell)} + C_{\ell\sigma(\ell)}$ . Finalmente

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \left[ \prod_{i=1}^n B_{i\sigma(i)} + \prod_{i=1}^n C_{i\sigma(i)} \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n B_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n C_{i\sigma(i)} = \det B + \det C. \quad \square \end{aligned}$$

**Corolario 2.21.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y sean  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{1 \times n}$  las filas  $A$ . Supongamos que  $A_k = B_k + C_k$  y sean las matrices  $B$  cuyas filas son  $A_1, \dots, A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ , y  $C$  cuyas filas son  $A_1, \dots, A_{k-1}, C_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ . Entonces

$$\det A = \det B + \det C.$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**Corolario 2.22.** Sean  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ , entonces

$$\det(A_1 \cdots \underbrace{A_j}_{\text{columna } i} \cdots \underbrace{A_i}_{\text{columna } j} \cdots A_n) = -\det(A_1 \cdots \underbrace{A_i}_{\text{columna } i} \cdots \underbrace{A_j}_{\text{columna } j} \cdots A_n).$$

En otras palabras, si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y  $A'$  es la matriz que se obtiene de  $A$  intercambiando la  $i$ -ésima columna con la  $j$ -ésima columna, con  $i \neq j$ , entonces

$$\det A' = -\det A.$$

*Demostración.* Consideremos la matriz

$$\tilde{A} = (A_1 \cdots (A_i + A_j) \cdots (A_i + A_j) \cdots A_n),$$

o sea,  $\tilde{A}$  es la matriz cuyas columnas  $i$  y  $j$  son iguales a  $A_i + A_j$  y por lo tanto tiene determinante nulo. Además, usando las Proposiciones 2.20 y 2.15 obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \det \tilde{A} = \det(A_1 \cdots (A_i + A_j) \cdots (A_i + A_j) \cdots A_n) \\ &= \det(A_1 \cdots A_i \cdots (A_i + A_j) \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots A_j \cdots (A_i + A_j) \cdots A_n) \\ &= \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_i \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n) \\ &\quad + \det(A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots A_j \cdots A_j \cdots A_n) \\ &= \det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n) + \det(A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n), \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\det(A_1 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n) = -\det(A_1 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n). \quad \square$$

**Ejercicio 2.23.** Enunciar y demostrar el resultado análogo para el intercambio de filas.

**Proposición 2.24.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y sea  $A'$  la matriz que se obtiene de  $A$  sumando a la  $j$ -ésima columna un múltiplo de la  $k$ -ésima columna, con  $j \neq k$ . Entonces

$$\det A' = \det A.$$

*Demostración.* Supongamos sin perder generalidad que  $j < k$ . Denotemos por  $A_1, \dots, A_n$  las columnas de la matriz  $A$ . Entonces

$$A' = (A_1 \cdots A_{j-1} (A_j + \alpha A_k) A_{j+1} \cdots A_k \cdots A_n)$$

para cierto  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Luego, usando las Proposiciones 2.15, 2.16 y 2.20 tenemos que

$$\begin{aligned} \det A' &= \det(A_1 \cdots A_{j-1} (A_j + \alpha A_k) A_{j+1} \cdots A_k \cdots A_n) \\ &= \det(A_1 \cdots A_{j-1} A_j A_{j+1} \cdots A_k \cdots A_n) \\ &\quad + \det(A_1 \cdots A_{j-1} \alpha A_k A_{j+1} \cdots A_k \cdots A_n) \\ &= \det A + \alpha \det(A_1 \cdots A_{j-1} A_k A_{j+1} \cdots A_k \cdots A_n) \\ &= \det A. \end{aligned} \quad \square$$

**Ejercicio 2.25.** Enunciar y demostrar el resultado análogo para operaciones sobre las filas de la matriz.

Con los resultados anteriores el calculo del determinante se simplifica drásticamente.

**Ejemplo 2.26.** Calculemos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La idea es “mejorar” la matriz  $A$  aplicando las operaciones de intercambio de filas o columnas y sumando o restando a una fila/columna un múltiplo de otra fila/columna. Como ya demostramos, al hacer intercambios de filas o columnas, el determinante cambia de signo, en tanto que si a una fila o columna le sumamos un múltiplo de otra, el determinante no cambia. Para justificar las operaciones que usamos en cada paso usaremos la siguiente notación. Para el intercambio de filas o columnas escribiremos, por ejemplo,  $f1 \leftrightarrow f2$  para indicar que intercambiamos la fila 1 con la fila 2, en tanto que  $c2 \leftrightarrow c4$  indica que intercambiamos la columna 2 con la columna 4. Por otro lado, la notación  $f3 \rightarrow f3 - 2f1$  significa que reemplazamos la fila 3 por la fila 3 menos 2 veces la fila 1.

Aclarado esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\det A \stackrel{f1 \leftrightarrow f2}{=} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{f3 \rightarrow f3 - 2f1}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
& \stackrel{f4 \rightarrow f4 - f1}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{c2 \leftrightarrow c4}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
& \stackrel{f2 \leftrightarrow f3}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{f4 \leftrightarrow f4 + f3}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego hemos mostrado que el determinante de  $A$  es igual al determinante de una matriz triangular superior, los cuales son muy fáciles de calcular usando la siguiente proposición.

**Proposición 2.27.** Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  es triangular superior, entonces

$$\det A = A_{11}A_{22} \cdots A_{nn}.$$

*Demostración.* Una matriz triangular superior tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

es decir  $A_{ij} = 0$  si  $i > j$ . Ahora bien, para  $\sigma \in S_n$ ,  $\sigma \neq \text{id}$ , siempre existe un  $i$  tal que  $i > \sigma(i)$ . En efecto, si esto no sucediera, se tendría  $n \leq \sigma(n) \leq n$ , de donde sigue  $\sigma(n) = n$ . Luego  $n-1 \leq \sigma(n-1) \leq n-1$ , lo cual implica  $\sigma(n-1) = n-1$ . Así siguiendo, se obtiene que  $\sigma(i) = i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Absurdo, pues supusimos  $\sigma \neq \text{id}$ . Esto dice que en la definición de  $\det A$  todos los sumandos correspondientes a  $\sigma \neq \text{id}$  son nulos, por tanto

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} = \text{sg}(\text{id}) \prod_{i=1}^n A_{ii} = \prod_{i=1}^n A_{ii}$$

como queríamos probar. □

**Ejemplo 2.26** (continuación). Usando el resultado anterior concluimos que

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)) = 6.$$

Una de las propiedades más importantes de la función determinante es la siguiente.

**Teorema 2.28.** Si  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , entonces

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

*Demostración.* La veremos más adelante.  $\square$

**Definición 2.29.** Una matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  se dice *invertible* si existe  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $AB = BA = I$ . En caso de que exista una tal  $B$ , ésta se llama la *matriz inversa* de  $A$  y se denota por  $B = A^{-1}$ .

*Observación 2.30.* Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  es invertible, entonces la inversa es única. En efecto, supongamos que existen  $B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tales que  $BA = AB = I = CA = AC$ . Sigue que

$$B = BI = BAC = IC = C.$$

**Corolario 2.31.** Una matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  es invertible si y sólo si  $\det A \neq 0$ . Más aún, si  $A$  es invertible, entonces  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ .

*Demostración.* Si  $A$  es invertible entonces existe la inversa  $A^{-1}$  de  $A$  y vale  $AA^{-1} = I$ . Luego por el Teorema 2.28 se tiene  $1 = \det I = \det A \det A^{-1}$ , por ende, tanto  $\det A$  como  $\det A^{-1}$  deben ser no nulos. Notar que esta ecuación también implica que  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ .

La recíproca la probaremos en el próximo apartado, cuando exhibamos un método para calcular la matriz inversa de una matriz  $A$  tal que  $\det A \neq 0$ .  $\square$

## 2.1. Desarrollo del determinante por filas o columnas

En este apartado presentamos un método alternativo para el cálculo del determinante. Dicho método no presenta ninguna ventaja sobre la Definición 2.10 en lo que respecta a la complejidad de cálculo, pero sí tiene importancia teórica como veremos en breve.

**Definición 2.32.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  y sean  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Se define  $A(i|j)$  como la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que se obtiene suprimiendo la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de la matriz  $A$ .

**Ejemplo 2.33.** Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A(1|1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A(1|3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A(3|2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Más aún, el proceso se puede repetir,

$$A(1|1)(2|3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(1|1)(2|3)(2|2) = 4.$$

A continuación presentamos una fórmula recursiva para el cálculo de la función determinante.

**Teorema 2.34** (Desarrollo del determinante por la primera fila). *Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , entonces*

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} \det A(1|j).$$

Antes de hacer la prueba del teorema veamos, a modo de ejemplo, algunos casos particulares.

**Ejemplo 2.35.** Calculemos, usando el Teorema 2.34, el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\det A = a_{11} \det A(1|1) - a_{12} \det A(1|2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

También podemos calcular el determinante de una matriz  $3 \times 3$  usando determinantes de matrices  $2 \times 2$ . Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A(1|1) - a_{12} \det A(1|2) + a_{13} \det A(1|3) \\ &= a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

*Demostración del Teorema 2.34.* Observemos que el conjunto de todas las permutaciones de  $n$  elementos, puede describirse como la unión disjunta de las permutaciones que mandan el 1 a un elemento especificado  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Más precisamente, si llamamos

$$S_n^j = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j\},$$

entonces se tiene

$$S_n = S_n^1 \cup S_n^2 \cup \dots \cup S_n^n$$

y esta unión es disjunta, es decir,  $S_n^j \cap S_n^k = \emptyset$ , si  $j \neq k$ . Ahora bien, un elemento  $\sigma \in S_n^j$  puede pensarse como una permutación de  $n - 1$  elementos, o sea, como un elemento de  $S_{n-1}$ . En efecto, sabemos que todos los elementos de  $S_n^j$  mandan 1 en  $j$ , luego, podemos pensar que los elementos de  $S_n^j$  permutan los números  $\{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ . Esto puede formalizarse diciendo que a cada elemento  $\sigma \in S_n^j$  le corresponde un único elemento  $\sigma^j \in S_{n-1}$ . Esta identificación puede resultar un poco difícil de entender, pues  $\sigma \in S_n^j$  permuta los elementos  $\{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ , pero  $\sigma^j$  permuta los elementos

$\{1, 2, \dots, n-1\}$ . Veamos unos ejemplos para clarificar esta noción. Consideremos la permutación  $\sigma \in S_7^3$  dada por  $\sigma = (3, 2, 1, 6, 5, 4, 7)$ . Luego  $\sigma(1) = 3$  y  $\sigma$  reordena la 6-upla  $(1, 2, 4, 5, 6, 7)$  en  $(2, 1, 6, 5, 4, 7)$ . O sea, el 1er elemento va al 2do lugar, el 2do elemento va al 1er lugar, el 3er elemento va al 5to lugar, el 4to elemento va al 4to lugar, el 5to elemento va al 3er lugar y el 6to elemento va al 6to lugar. Luego, la identificación en este caso sería

$$\sigma = (3, 2, 1, 6, 5, 4, 7) \longleftrightarrow \sigma^3 = (2, 1, 5, 4, 3, 6).$$

Otro ejemplo: ¿qué permutación  $\sigma \in S_7^3$  corresponde a la permutación  $\text{id} \in S_6$ ? En este caso debería ser  $\sigma(1) = 3$  pero  $\sigma$  tiene que mantener el orden de los restantes elementos  $(1, 2, 4, 5, 6, 7)$ . Luego

$$\sigma = (3, 1, 2, 4, 5, 6, 7) \longleftrightarrow \sigma^3 = (1, 2, 3, 4, 5, 6) = \text{id}.$$

La pregunta clave en la demostración del teorema es: dada  $\sigma \in S_n^j$ , ¿cuál es el signo de la permutación  $\sigma^j \in S_{n-1}$ ? Para responder esta pregunta, observemos que para calcular  $\text{sg}(\sigma)$  uno debe expresar  $\sigma$  como una composición de trasposiciones, o dicho de otra manera, necesitamos contar la cantidad de intercambios de dos elementos necesarios para llegar de  $(1, 2, \dots, n)$  a  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ . En tanto que, al ser  $\sigma(1) = j$ , para calcular el signo de  $\sigma^j$  uno tiene que contar la cantidad de intercambios de dos elementos necesarios para pasar de  $(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n)$  a  $(\sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n))$ . Ahora bien, la relación entre  $\text{sg}(\sigma)$  y  $\text{sg}(\sigma^j)$  viene dada como sigue: para pasar de  $(1, 2, \dots, n)$  a

$$(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) = (j, \sigma(2), \dots, \sigma(n))$$

uno puede hacer primero  $j-1$  intercambios para pasar de  $(1, 2, \dots, n)$  a  $(j, 2, 3, \dots, n)$  y luego hacer los intercambios necesarios sobre los últimos elementos para transformar  $(j, 2, 3, \dots, n)$  en  $(j, \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n))$ . Por tanto

$$\text{sg}(\sigma) = (-1)^{j-1} \text{sg}(\sigma^j) = (-1)^{1+j} \text{sg}(\sigma^j).$$

Hechas estas consideraciones, podemos completar la prueba del teorema. En efecto,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} = \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in S_n^j} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in S_n^j} \text{sg}(\sigma) A_{1j} \prod_{i=2}^n A_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma^j \in S_{n-1}} (-1)^{1+j} \text{sg}(\sigma^j) A_{1j} \prod_{i=1}^{n-1} A(1|j)_{i\sigma^j(i)} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} \sum_{\sigma^j \in S_{n-1}} \text{sg}(\sigma^j) \prod_{i=1}^{n-1} A(1|j)_{i\sigma^j(i)} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} \det A(1|j). \end{aligned} \quad \square$$



*Observación 2.36.* En algunos libros de texto el determinante se define recursivamente usando la fórmula del Teorema 2.34. Es decir, para matrices  $A \in \mathbb{F}^{1 \times 1} = \mathbb{F}$ , se define  $\det A = A$  y luego, dado  $n \in \mathbb{N}$ , se define el determinante de una matriz  $A \in \mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}$  como

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} A_{1j} \det A(1|j).$$

Como el determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta y el determinante cambia de signo si en una matriz intercambiamos filas o columnas, se pueden deducir fórmulas para el desarrollo del determinante por cualquier fila o columna de la matriz. Queda como ejercicio hacer las demostraciones de los siguientes resultados.

**Corolario 2.37** (Desarrollo del determinante por la  $i$ -ésima fila). Sean  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Entonces

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j).$$

**Corolario 2.38** (Desarrollo del determinante por la  $j$ -ésima columna). Sean  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Entonces

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j).$$

A continuación mostramos un método para calcular la inversa de una matriz  $A$  (si es que ésta existe).

**Definición 2.39.** Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , el escalar  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$  se llama el *cofactor*  $i, j$  de  $A$ . La matriz  $C = (C_{ij})$  se llama *matriz de los cofactores* de  $A$ .

**Definición 2.40.** La *matriz adjunta* de  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , denotada por  $\text{adj } A$ , es la matriz transpuesta de la matriz de los cofactores de  $A$ . Es decir, el lugar  $i, j$  de  $\text{adj } A$  está dado por el cofactor  $j, i$  de  $A$ :

$$(\text{adj } A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i).$$

**Teorema 2.41.** Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , entonces

$$A \text{adj } A = (\text{adj } A)A = (\det A)I$$

*Demostración.* Debemos probar que  $(A \text{adj } A)_{ij} = ((\text{adj } A)A)_{ij} = (\det A)\delta_{ij}$ , en donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker (vale 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ ). Probaremos que  $(A \text{adj } A)_{ij} = \delta_{ij}$ , dejando como ejercicio el comprobar que  $((\text{adj } A)A)_{ij} = \delta_{ij}$ . Para ello, calculamos la matriz producto  $A \text{adj } A$  por definición. En primer lugar, si  $i \neq j$  tenemos que

$$(A \text{adj } A)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (\text{adj } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} A_{ik} \det A(j|k) = \det A',$$

usando el Corolario 2.37, en donde  $A'$  es la matriz tal que  $(A')_{ik} = (A')_{jk}$  para todo  $k = 1, \dots, n$  y tiene todas sus otras entradas iguales a las entradas de  $A$ . Pero en  $A'$ , la columna  $i$  es igual a la columna  $j$ , luego, por la Proposición 2.15, se tiene que  $0 = \det A' = (A \text{adj } A)_{ij}$ .

Finalmente,

$$(A \operatorname{adj} A)_{ii} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (\operatorname{adj} A)_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{ik} \det A(i|k) = \det A,$$

nuevamente por el Corolario 2.37, lo cual concluye la prueba del teorema.  $\square$

Usando el teorema anterior podemos completar la prueba del Corolario 2.31. De hecho, podemos encontrar una fórmula para la matriz inversa de una matriz invertible.

**Corolario 2.42.** *Sea  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $\det A \neq 0$ . Entonces  $A$  es invertible y vale*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

*Demostración.* Es inmediato del teorema anterior que si  $\det A \neq 0$ , entonces

$$\left( \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \right) A = A \left( \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \right) = I. \quad \square$$

Se dice que una matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tiene una *inversa a izquierda* (resp. *a derecha*) si existe  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $BA = I$  (resp.  $AB = I$ ).

**Corolario 2.43.** *Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tiene una inversa a izquierda (resp. a derecha) entonces  $A$  es invertible.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $BA = I$ . Sigue que

$$1 = \det(BA) = (\det B)(\det A)$$

y en particular  $\det A \neq 0$ . Luego  $A$  es invertible por el corolario anterior. El caso en el que  $A$  admite una inversa a derecha es análogo.  $\square$

**Ejemplo 2.44.** Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La matriz de los cofactores de  $A$  es

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A(1|1) & (-1)^{1+2} \det A(1|2) \\ (-1)^{2+1} \det A(2|1) & (-1)^{2+2} \det A(2|2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Luego, si  $ad - bc \neq 0$ , entonces  $A$  es invertible y su inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.45.** Decidir si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es invertible y calcular su inversa en caso afirmativo. Calculamos primero la matriz de los cofactores de  $A$ , para esto, necesitamos calcular  $\det A(i|j)$  para todos  $i, j = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} \det A(1|1) &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13, & \det A(1|2) &= \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10, & \det A(1|3) &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \\ \det A(2|1) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7, & \det A(2|2) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, & \det A(2|3) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \\ \det A(3|1) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 12, & \det A(3|2) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, & \det A(3|3) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Luego la matriz de los cofactores de  $A$  y la matriz adjunta están dadas por

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 10 & -4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 12 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 12 \\ 10 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para chequear si  $A$  es invertible deberíamos calcular  $\det A$ , pero observemos que con lo ya obtenido, esta cuenta puede hacerse como

$$A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -6 & 12 \\ 10 & 6 & -5 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

Luego  $\det A = 37 \neq 0$  y por lo tanto  $A$  es invertible con inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 13 & -6 & 12 \\ 10 & 6 & -5 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

El método que desarrollamos para el cálculo de la inversa de una matriz resulta muy tedioso de aplicar y nada eficiente para matrices de tamaño grande. En la próxima unidad desarrollaremos un métodos más eficientes, tanto para el calculo del determinante como para encontrar la inversa de una matriz invertible.

*Comentario.* El *permanente* de una matriz  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  se define de manera análoga al determinante, sumando todos los factores que se pueden armar eligiendo un elemento en cada fila recorriendo todas las columnas, pero sin tener en cuenta el signo de la permutación de las columnas, es decir,

$$\text{perm } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}.$$

Por ejemplo,

$$\text{perm} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc,$$

$$\text{perm} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + afh + bdi + bfh + cdh + ceg.$$

Con las mismas técnicas que aprendimos en esta unidad, uno puede probar que el permanente comparte algunas propiedades con el determinante, por ejemplo  $\text{perm } A = \text{perm } A^t$ , o que si uno multiplica la columna  $k$  de  $A$  por el escalar  $\alpha$  y llama  $A'$  a esta nueva matriz, entonces  $\text{perm } A' = \alpha \text{perm } A$ . Pero otras propiedades ya no son válidas, por ejemplo, si una matriz  $A$  tiene dos columnas iguales, no necesariamente vale  $\text{perm } A = 0$ . Tampoco es cierto que  $\text{perm}(AB) = (\text{perm } A)(\text{perm } B)$  para todas  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . En efecto,

$$4 = \text{perm} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{perm} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \text{perm} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{perm} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 8.$$

Es la falta de estas propiedades la que hace que el permanente, si bien tiene una definición similar al determinante, sea mucho más difícil de calcular. En efecto, si uno utiliza la definición, tanto para el permanente como para el determinante deben realizarse  $n!n$  operaciones sobre los coeficientes de la matriz (porque tenemos  $n!$  sumandos de productos de  $n$  elementos). Sin embargo, para calcular el determinante de una matriz uno puede realizar operaciones por fila y columna para transformarla en una matriz triangular superior. Puede verse (como lo probaremos en la próxima unidad y quizás ya podamos intuirlo de los ejemplos en esta unidad) que la cantidad necesaria de operaciones para pasar de una matriz arbitraria a una matriz triangular superior es del orden de  $n^3$ . Es por esto que se dice que el cálculo del determinante de una matriz es un problema que puede resolverse en tiempo polinomial, o que tiene complejidad  $O(n^3)$ , pues  $n^3$  es un polinomio de grado 3 en el número de operaciones necesarias para calcular el determinante. Estas consideraciones no son ciertas para el cálculo del permanente, de hecho se cree que el problema de calcular el permanente de una matriz no puede resolverse en tiempo polinomial.

Observar que  $n!n$  es mucho más grande que  $n^3$  cuando  $n$  es suficientemente grande.

$n$	$n^3$	$n!n$
1	1	1
2	8	4
3	27	18
4	64	96
5	125	600
6	216	4320
7	343	35280
8	512	322560
9	729	3265920
10	1000	36288000
15	3375	19615115520000
20	8000	48658040163532800000