FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CÁTEDRA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

UNIDAD N$^{\mathrm{O}}$1: APLICACIONES DE LA DERIVADA

EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

1. En cada uno de los siguientes ejemplos verifique si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle para la función dada en el intervalo indicado; en caso afirmativo obtenga el o los valores en los que la función derivada se anula:

   a) $f_1(x) = x^3 - x$ en $[-1,1]$,
   b) $f_2(x) = |x^3 - x|$ en $[-1,1]$,
   c) $f_3(x) = \cos 2x$ en $[0,\pi]$,
   d) $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1,1]$.

2. *a*) Aplicando el teorema de Rolle demostrar que, cualquiera sea el número real b, la ecuación cúbica

   $$x^3 - 3x + b = 0$$

   no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1,1]$.

   b) Demostrar que la ecuación

   $$x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

   posee exactamente dos raíces reales.

3. En cada uno de los siguientes ejemplos verifique si se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio para la función dada en el intervalo indicado; en caso afirmativo obtenga el o los valores medios cuya existencia establece el mencionado teorema:

   a) $f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en $[-3,4]$,
   b) $f_2(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$ en $[-1,0]$,
   c) $f_3(x) = \sqrt{1+x}$ en $[-1,1]$,
   d) $f_4(x) = x + \sqrt{x}$ en $[14]$.

4. Demostrar que en la parábola de ecuación cartesiana

   $$y = ax^2 + bx + c$$

   la cuerda que une los puntos de abscisas r y s es paralela a la recta tangente en el punto de abscisa $\frac{1}{2}(r+s)$.

5. Representar gráficamente la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, donde para $x \in [0,2]$,

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2) & \text{si} \quad x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases} .$$

   Verificar que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio y determinar sus valores medios.

6. Utilizando el teorema del valor medio demostrar la desigualdad: $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN

7. Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado en cada caso:

a) $f_1(x) = 3x - x^3$ en $[-2, \sqrt{3}]$,

b) $f_2(x) = \frac{x+3}{x-2}$ en $[-3, 1]$,

c) $f_3(x) = \sqrt{1 + x^2}$ en $[0, \sqrt{8}]$,

d) $f_4(x) = 1 + x^{\frac{2}{5}}$ en $[-1, 1]$.

8. Representar gráficamente las siguientes funciones y hallar sus extremos relativos:

   a) $f_1(x) = |1 - x^2|$,

   b) $f_2(x) = |x^3 + 1|$,

   c) $f_3(x) = x^2 + |3x - 2| + 1$,

   d) $f_4(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si} \quad x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

9. *a*) Siendo $k \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ mostrar que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, donde

   $$f(x) = x^k - kx$$

   posee un extremo relativo en $x = 1$, tratándose de un máximo relativo si $0 < k < 1$ y de un mínimo relativo si $k > 1$.

   b) Hallar los números $m \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, donde

   $$f(x) = \frac{9}{x} - m(x - 3)$$

   presenta un mínimo relativo en el punto $x = 3$.

   c) Demostrar que si $x > -1$ entonces

   $$\sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

10. En cada una de las siguientes funciones se pide:

    a) Determinar su dominio y estudiar su paridad.

    b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    c) Determinar sus extremos relativos.

    d) Determinar intervalos de convexidad y concavidad.

    e) Representarla gráficamente y dar su recorrido.

    f) Determinar sus extremos absolutos.

    $f_1(x) = x^4 - 8x^2$,
    $f_2(x) = x^3 + x^2 + 6x - 5$,
    $f_3(x) = e^{-x^2}$,
    $f_4(x) = x - 3 + \frac{2}{x+1}$,
    $f_5(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
    $f_6(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$,
    $f_7(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$,
    $f_8(x) = x + \operatorname{sen} x$,
    $f_9(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$,
    $f_{10}(x) = x \ln\left(\frac{2}{x}\right)$,
    $f_{11}(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$.

APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE BÚSQUEDA DE EXTREMOS

11. Entre todos los pares de números reales positivos cuya suma es igual a S hallar aquel para el cual

    a) el producto de sus cuadrados es máximo,

    b) la suma de sus cuadrados es mínima.

12. Entre todos los pares de números reales positivos tales que la suma de sus cuadrados es igual a R hallar aquel para el cual la suma es máxima.

13. *a*) Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área entre aquellos cuyo perímetro es $2L$.

b) Entre todos los rectángulos de área fija A determinar el que tiene

1) el menor perímetro,
2) la diagonal de longitud mínima.

14. *a*) Entre todos los rectángulos inscriptos en una circunferencia dada determinar el de perímetro máximo.

    b) Entre todos los rectángulos inscriptos en una semicircunferencia de manera que dos de sus vértices se encuentran sobre el diámetro determinar el de mayor área.

    c) Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos lados tienen 5, 12 y 13 unidades, de manera que la hipotenusa contenga un solo vértice del rectángulo.

15. Hallar el punto de la parábola de ecuación cartesiana $y^2 = 4x$ más próximo al punto $(2, 1)$.

16. Los márgenes superior e inferior de una página deben medir 1,5 cm cada uno, mientras que los márgenes laterales deben medir 1 cm cada uno. Si el área de la zona a imprimir debe ser de 240 cm ¿cuáles deben ser las dimensiones de la página para que su área total sea la menor posible?

17. Con un rectángulo de cartón de lados de medidas 12 y 16 cm se desea construir una caja sin tapa quitando cuadrados iguales en cada esquina del mismo y doblando hacia arriba los bordes. ¿cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con el procedimiento anterior?

LA REGLA DE BERNOULLI - L´HÔPITAL

18. Utilizando la regla de Bernoulli-L´Hôpital calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\arctan x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{3x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{\operatorname{sen} 3x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$,

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$,

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$,

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{0{,}001}}$,

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$,

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$,

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$,

n) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

19. *a*) Sean f y g dos funciones tales que existe un número $M > 0$ tal que

$$x > M \Rightarrow \ f \text{ y } g \text{ son derivables en el punto } x \text{ y además } g(x) \neq 0.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \ \Rightarrow \ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

b) Calcular los siguientes límites

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x^{-1}}{\arctan x^{-1}}$,

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$.

20. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\tan x}\right)$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x - \operatorname{arc\,sen} x}{x(1-\cos x)}$,

h) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

i) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}}$.

COMPARACIÓN DEL ORDEN DE INFINITÉSIMOS

21. Probar que la suma de dos infinitésimos de distinto orden es equivalente al infinitésimo de menor orden.

22. Probar que la diferencia de dos infinitésimos equivalentes es un infinitésimo de orden superior a ellos.

23. Comparar el orden de los siguientes infinitésimos, en el punto que corresponda:

   a) $f_1(x) = x^2 - 1$ y $g_1(x) = x - 1$,
   b) $f_2(x) = 1 - \cos 4x$ y $g_2(x) = x \operatorname{sen} x$,
   c) $f_3(x) = 6^x - 1$ y $g_3(x) = 5x$,
   d) $f_4(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$ y $g_4(x) = \ln(x + 1)$,
   e) $f_5(x) = x^2 e^{2x}$ y $g_5(x) = \ln(x^4 + e^{4x})$.

EL DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

24. Hallar el diferencial de las siguientes funciones

   a) $f_1(x) = x^5$,
   b) $f_2(x) = \sqrt[4]{x}$,
   c) $f_3(x) = \frac{x-2}{x+3}$,
   d) $f_4(x) = \operatorname{sen} 2x$.

25. *a*) Hallar el diferencial de cada una de las siguientes funciones en el punto x e incremento $\triangle x$ indicados en cada caso

$$f_1(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1,\ x = 2,\ \triangle x = 0,5, \quad f_2(x) = \cos x,\ x = \tfrac{\pi}{6},\ \triangle x = 0,05.$$

   b) Hallar el incremento y el diferencial de la función $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ en el punto $x = 1$ e incrementos $\triangle x$ siguientes:

$$\triangle x_1 = 1,\ \triangle x_2 = 0,5.$$

   c) Representar gráficamente la función $f(x) = x^2$ y su aproximación lineal para $x = 1$, $\triangle x = 0,5$.

26. Hallar el incremento y el diferencial de cada una de las siguientes funciones en el punto x e incremento $\triangle x$ indicados en cada caso. A continuación trazar una gráfica donde se representen los valores de x, $f_i(x)$, $\triangle x$, df_i y $\triangle f_i$.

   a) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\triangle x = 1$,
   b) $f_2(x) = 4 - x^2$, $x = -2$, $\triangle x = 0,5$.

APROXIMACIÓN LINEAL

27. Emplear diferenciales para obtener un valor aproximado de los siguientes números:

   a) $y_1 = \sqrt{36,5}$,
   b) $y_2 = \frac{1}{10,1}$,
   c) $y_3 = \cos 59°$.

28. Se encontró que el lado de un cubo mide 30 cm. Con un posible error de medición no superior a 0.1 cm. Utilizando diferenciales estimar el error máximo posible en el cálculo de

   a) el volumen del cubo,
   b) el área del mismo.

POLINOMIOS DE TAYLOR

29. Obtener los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = xe^x$, $n = 3$, $a = 1$,

b) $f_2(x) = x^3 \ln x$, $n = 7$, $a = 1$,

c) $f_3(x) = x^5 + x^3 + x$, $n = 4$, $a = 0$.

30. Dadas las funciones $f_1(x) = e^{mx}$, $f_2(x) = \operatorname{sen}(mx)$ y $f_3(x) = \frac{1}{1+x}$,

    a) Comprobar, utilizando el principio de inducción matemática, que sus derivadas sucesivas verifican las igualdades siguientes:

    1) $f_1^{(n)}(x) = m^n e^{mx}$,

    2) $f_2^{(n)}(x) = m^n \operatorname{sen}\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right)$,

    3) $f_3^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

    b) Demostrar que los polinomios de Taylor asociados a las funciones enunciadas en el apartado anterior, verifican las siguientes igualdades:

    1) $T_n(f_1, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} -\frac{m^k}{k!} x^k$,

    2) $T_{2n-1}(f_2, 0)(x) = T_{2n}(F_2, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$,

    3) $T_n(f_3, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

31. Utilizando los resultados del ejercicio anterior y las propiedades de los polinomios de Taylor, para demostrar que los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto $a = 0$, verifican las igualdades correspondientes:

    a) $f_1(x) = \operatorname{sen} 3x$, $T_{2n-1}(f_1, 0)(x) = T_{2n}(f_1, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$,

    b) $f_2(x) = \cos x$, $T_{2n}(f_2, 0)(x) = T_{2n+1}(f_2, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$,

    c) $f_3(x) = e^{-x}$, $T_n(f_3, 0)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$,

    d) $f_5(x) = \ln(1 + x)$, $T_n(f_6, 0)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

32. A partir de la igualdad para $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

obtener los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0 y una expresión del resto correspondiente:

a) $f_1(x) = \ln(1 + x)$,

b) $f_2(x) = \ln(1 - x)$,

c) $f_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$,

d) $f_4(x) = \frac{x}{1-x^2}$,

e) $f_5(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$,

f) $f_6(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

g) $f_7(x) = \frac{1}{2+x}$,

h) $f_8(x) = \arctan x$.

33. Obtener un valor aproximado de los siguientes números con cinco cifras decimales exactas:

    a) $e^{-0,2}$,

    b) $\cos\frac{\pi}{36}$,

    c) $\ln 1,2$.

34. Calcular el grado del polinomio de Taylor necesario para obtener las siete primeras cifras decimales del número $\ln 5$ utilizando la fórmula de Taylor correspondiente a la función $f(x) = \ln(x + 1)$.