



ANÁLISIS MATEMÁTICO II - 2017

PRÁCTICA N°1: APLICACIONES DE LA DERIVADA

EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

1. En cada uno de los siguientes ejemplos verifique si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle para la función dada en el intervalo indicado; en caso afirmativo obtenga el o los valores en los que la función derivada se anula:

a) $f_1(x) = x^3 - x$ en $[-1, 1]$,

c) $f_3(x) = \cos 2x$ en $[0, \pi]$,

b) $f_2(x) = |x^3 - x|$ en $[-1, 1]$,

d) $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1, 1]$.

2. a) Aplicando el teorema de Rolle demostrar que, cualquiera sea el número real b , la ecuación cúbica

$$x^3 - 3x + b = 0$$

no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$.

- b) Demostrar que la ecuación

$$x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

posee exactamente dos raíces reales.

3. En cada uno de los siguientes ejemplos verifique si se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio para la función dada en el intervalo indicado; en caso afirmativo obtenga el o los valores medios cuya existencia establece el mencionado teorema:

a) $f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en $[-3, 4]$,

c) $f_3(x) = \sqrt{1 + x}$ en $[-1, 1]$,

b) $f_2(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$ en $[-1, 0]$,

d) $f_4(x) = x + \sqrt{x}$ en $[1, 4]$.

4. Demostrar que en la parábola de ecuación cartesiana

$$y = ax^2 + bx + c$$

la cuerda que une los puntos de abscisas r y s es paralela a la recta tangente en el punto de abscisa $\frac{1}{2}(r + s)$.

5. Representar gráficamente la función $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, donde para $x \in [0, 2]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2) & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Verificar que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio y determinar sus valores medios.

6. Utilizando el teorema del valor medio demostrar la desigualdad: $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN

7. Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado en cada caso:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_1(x) = 3x - x^3 \text{ en } [-2, \sqrt{3}], & \text{c)} f_3(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ en } [0, \sqrt{8}], \\ \text{b)} f_2(x) = \frac{x+3}{x-2} \text{ en } [-3, 1], & \text{d)} f_4(x) = 1 + x^{\frac{2}{5}} \text{ en } [-1, 1]. \end{array}$$

8. Representar gráficamente las siguientes funciones y hallar sus extremos relativos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_1(x) = |1 - x^2|, & \text{c)} f_3(x) = x^2 + |3x - 2| + 1, \\ \text{b)} f_2(x) = |x^3 + 1|, & \text{d)} f_4(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

9. a) Siendo $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ mostrar que la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = x^k - kx$$

posee un extremo relativo en $x = 1$, tratándose de un máximo relativo si $0 < k < 1$ y de un mínimo relativo si $k > 1$.

- b) Hallar los números $m \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \frac{9}{x} - m(x-3)$$

presenta un mínimo relativo en el punto $x = 3$.

- c) Demostrar que si $x > -1$ entonces

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

10. En cada una de las siguientes funciones se pide:

- Determinar su dominio y estudiar su paridad.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Determinar sus extremos relativos.
- Determinar intervalos de convexidad y concavidad.
- Representarla gráficamente y dar su recorrido.
- Determinar sus extremos absolutos.

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x^4 - 8x^2, & f_5(x) = \frac{x}{1+x^2}, & f_8(x) = x + \operatorname{sen} x, \\ f_2(x) = x^3 + x^2 + 6x - 5, & f_6(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, & f_9(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \\ f_3(x) = e^{-x^2}, & f_7(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}, & f_{10}(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right), \\ f_4(x) = x - 3 + \frac{2}{x+1}, & & f_{11}(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}. \end{array}$$

APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE BÚSQUEDA DE EXTREMOS

11. Entre todos los pares de números reales positivos cuya suma es igual a S hallar aquel para el cual
 - a) el producto de sus cuadrados es máximo,
 - b) la suma de sus cuadrados es mínima.
12. Entre todos los pares de números reales positivos tales que la suma de sus cuadrados es igual a R hallar aquel para el cual la suma es máxima.
13.
 - a) Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área entre aquellos cuyo perímetro es $2L$.
 - b) Entre todos los rectángulos de área fija A determinar el que tiene
 - 1) el menor perímetro,
 - 2) la diagonal de longitud mínima.
14.
 - a) Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia dada determinar el de perímetro máximo.
 - b) Entre todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de manera que dos de sus vértices se encuentran sobre el diámetro determinar el de mayor área.
 - c) Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos lados tienen 5, 12 y 13 unidades, de manera que la hipotenusa contenga un solo vértice del rectángulo.
15. Hallar el punto de la parábola de ecuación cartesiana $y^2 = 4x$ más próximo al punto $(2, 1)$.
16. Los márgenes superior e inferior de una página deben medir 1,5 cm cada uno, mientras que los márgenes laterales deben medir 1 cm cada uno. Si el área de la zona a imprimir debe ser de 240 cm² ¿cuáles deben ser las dimensiones de la página para que su área total sea la menor posible?
17. Con un rectángulo de cartón de lados de medidas 12 y 16 cm se desea construir una caja sin tapa quitando cuadrados iguales en cada esquina del mismo y doblando hacia arriba los bordes. ¿cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con el procedimiento anterior?