FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CÁTEDRA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

UNIDAD N^{o}2: CALCULO INTEGRAL

SUMAS DE RIEMANN. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA.

1. Sea $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. a) Calcular $U_4(f)$ y $L_6(f)$. b) Calcular la suma de Riemann de f asociada a la partición regular P_6, tomando como puntos muestra los puntos medios de cada subintervalo. c) Dar expresiones para $U_n(f)$ y $L_n(f)$. d) Calcular $\int_{-3}^{1} f(x)dx$.

2. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\int_{-1}^{5}(1 + x)dx$
   b) $\int_{1}^{4}(x^2 + x - 1)dx$
   c) $\int_0^5 2x^3 dx$

   Sugerencia: utilizar los siguientes resultados $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. Sea $f(x) = x$, mostrar que $\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.
   Sugerencia: a) Considerar una partición regular P_n donde cada $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ para $i = 0, ..., n$. b) Probar que $L_n(f) = a(b - a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(i - 1)$ y $U_n(f) = a(b - a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i$. c) Calcular los límites $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(f)$.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS.

4. Propiedad de homogeneidad de la integral: Si $c \in \mathbb{R}$ demostrar que cf es integrable y además que $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

5. Propiedad de aditividad respecto del intervalo de integración. Sabiendo que $\int_1^3 f(x)dx = -2$, $\int_1^6 f(x)dx = 5$ y $\int_1^6 g(x)dx = 4$, calcular:

   a) $\int_2^2 f(x)dx$
   b) $\int_1^3 4f(x)dx$
   c) $\int_3^6 f(x)dx$
   d) $\int_6^1 g(x)dx$
   e) $\int_1^6(2f(x) - g(x))dx$

6. El teorema del valor medio del cálculo integral. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y sean m, M los respectivos mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Demostrar que $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$. Probar que si f continua en $[a, b]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$. Este número $f(c)$ suele ser denominado el valor medio de la función f en $[a, b]$.

7. Hallar el valor medio de f en el intervalo indicado y determinar en qué puntos la función alcanza dicho valor:

   a) $f(x) = x^2 - 1$ en $[0, \sqrt{3}]$
   b) $f(x) = |x^2 - 2x|$ en $[1, 3]$

8. Analizar si las siguientes funciones son integrables en $[0, 2]$ y calcular su integral cuando sea posible:

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = x + [x]$

c) $f(x) = \begin{cases} x + [x] & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

9. Calcular cada de las integrales intepreténdolas en términos de áreas:

   a) $\int_0^4 (3 + x) dx$

   b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

   c) $\int_0^3 (\sqrt{9 - x^2} + 2) dx$

   d) $\int_{-1}^2 (3x - 1) dx$

10. Dada la función $f(x) = -3x$, se pide:

    a) Calcular $\int_{-2}^3 f$, $\int_{-2}^3 |f|$, $\int_2^0 f$.

    b) Hallar x tal que $\int_{-2}^x f(t)dt = 0$

FUNCIONES INTEGRALES. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO.

11. Dada $f(x) = x^2$ se definen las funciones

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt \qquad G(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad H(x) = \int_1^x f(t)dt$$

    Se pide:

    a) Analizar la relación entre F, G y H.

    b) Representar gráficamente a F, G y H.

    c) Analizar la realción entre F', G' y H'.

12. Para cada una de las funciones f definidas en $[0, 4]$ trazar un croquis aproximado de la función f y de la función g definida por $g(x) = \int_c^x f(t)dt$.

    a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq d \\ 2 & \text{si } d \leq x \leq 4 \end{cases}$ siendo $c = 0$ y $0 < d < 4$.

    b) $f(x) = -1 + \frac{x}{c}$ siendo $0 < c < 4$.

13. Probar que si f es integrable en $[a, b]$ y $c \in (a, b]$, la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $G(x) = \int_x^c f(t)dt$ resulta continua y derivable en cada punto de continuidad de f valiendo además que $G'(x) = -f(x)$.

14. Si f integrable en (a, b) y $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ es derivable en (c, d), con $a < g(x) < b \; \forall x \in [c, d]$ y $\alpha \in [a, b]$ entonces la función $H : [c, d] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \int_\alpha^{g(x)} f(t)dt$ es continua y además derivable en cada x tal que $g(x)$ sea un punto de continuidad de f, valiendo además que $H'(x) = f(g(x))g'(x)$. Sin intentar el cálculo de las integrales hallar las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $H(x) = \int_\pi^x \frac{dt}{1+t^3}$

    b) $H(x) = \int_{x^2}^\pi \frac{\sin t}{t} dt$

    c) $H(x) = \int_{-2}^x x \cos t dt$

    d) $H(x) = \int_x^2 \cos t^3 dt$

    e) $H(x) = \int_x^{x^2} (7t - 5) \, dt$

15. Hallar una función f continua y un número a tal que $\int_a^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2}$.

16. Sea $f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2} dt$, sin intentar el cálculo de la integral, hallar un polinomio de grado no mayor que 2 tal que $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$ y $P''(0) = f''(0)$.

17. Sea $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$, hallar el intervalo donde f es convexa.

18. Sea $f(x) = 2 + \int_1^x \frac{1}{1+t} dt$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

LA REGLA DE BARROW.

19. Aplicando la regla de Barrow calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 2x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x})dx$

b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x} - 2x^2 + 5}{x^2} dx$

c) $\displaystyle\int_{-2}^4 f(x)dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

d) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^2 |x - x^2| dx$

20. Calcular el área de las regiones acotadas por las curvas que se indican en cada caso: a) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$; b) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/2$; c) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$; d) $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$.

LAS FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL.

21. Hallar el número real ξ tal que si $x > 0 \Rightarrow \ln x = \xi + \displaystyle\int_e^x \frac{1}{t} dt$.

22. Dadas las funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x - 1 - \ln x$ y $g(x) = \ln x - 1 - \frac{1}{x}$ se pide: a) analizando las derivadas de éstas, demostrar que si $x > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ y que la igualdad v ale únicamente para $x = 1$. Interpretar geométricamente las desigualdades. b) Utilizando la definición de derivada de $\ln x$ en $x = 1$ demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

23. Hallar los números reales a, b tales que$e^x = b + \displaystyle\int_a^x e^s ds$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

24. Demostrar las siguientes igualdades (para los valores de a, b en que sean posibles las expresiones):

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{3x} - 1} = \frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = \frac{\ln a}{\ln b}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - x} = 1$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = -1$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2x} \ln x}{(x^3+1)(x-1)} = \frac{1}{2}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \frac{a^2}{b^2}$

h) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - 2x + \ln x} = 0$

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

25. Dadas las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = x \ln^2 x$

c) $f(x) = 2xe^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

e) $f(x) = x^x$

f) $f(x) = e^{-x} \sin x$

g) $f(x) = e^{-x} \cos x$

Se pide: determinar dominio y recorrido, hallar intervalos de monotonía y de concavidad (o convexidad), hallar sus extremos relativos y/o absolutos, esbozar las gráficas, calculando los límites necesarios para justificar las mismas.