FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CÁTEDRA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

# UNIDAD N$^o$2: CALCULO INTEGRAL - CONTINUACIÓN

## MÉTODO DE SUSTITUCIÓN EN INTEGRALES DEFINIDAS.

1. Calcular las siguientes integrales, en caso de que existan:

   a) $\displaystyle\int_2^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{8x^3 - 1}{(2x^4 - x)^2} dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx$

2. Si $m$ y $n$ son números positivos, demostrar que:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

3. Sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar las siguientes propiedades:

   a) Si $f$ es par entonces $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

   b) Si $f$ es impar entonces $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

4. Si $f$ es una función integrable en $\mathbb{R}$ demostrar que vale:

   a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$ b) $\displaystyle\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$

5. Probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ valen las siguientes igualdades:

   a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

   b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

   c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

## MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES EN INTEGRALES DEFINIDAS.

6. Calcular las siguientes integrales, en caso de que existan:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2x}{e^x} dx$ b) $\displaystyle\int_1^3 3x^2 \ln x dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$

7. Verificar las siguientes igualdades:

*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$ *b*) $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$ *c*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$

PRIMITIVAS DE FUNCIONES RACIONALES.

8. Hallar las primitivas de las siguientes fracciones simples:

   *a*) $\dfrac{1}{3-5x}$ *b*) $\dfrac{1}{(4-7x)^5}$ *c*) $\dfrac{1}{x^2-x+2}$ *d*) $\dfrac{1}{(4x^2+1)^2}$ *e*) $\dfrac{4x-3}{3x^2+3x+1}$

9. Calcular las integrales

   *a*) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{3-5x}$ *b*) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(4-7x)^5}$ *c*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+2}dx$ *d*) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+2+x^2}{x^3-1}\,dx$ *e*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+3x^2+x-1}{x^3+x}dx$ *f*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+3x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$

10. Integrales de la forma $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)dx$, mediante la sustitución $u = \tan \dfrac{x}{2}$, se reducen a integrales de la forma $\displaystyle\int R(u)du$. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

    *a*) $\dfrac{1}{\cos x}$ *b*) $\dfrac{1}{\sin x}$ *c*) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$ *d*) $\dfrac{1}{\cos x+\sin x}$ *e*) $\dfrac{\sin^3 x}{1+\sin^2 x}$

11. Probar que integrales de la forma $\displaystyle\int R(e^x)dx$, mediante la sustitución $u = e^x$, se reducen a integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{R(u)}{u}du$. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

    *a*) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ *b*) $\dfrac{3e^x}{(e^{2x}-e^x+1)^2}$ *c*) $\dfrac{1+\sinh x}{1+\cosh x}$

12. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

    *a*) $\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}$ *b*) $\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}}$ *c*) $2^x \sin x$ *d*) $x^2 \arcsin x$ *e*) $\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x-1}$ *f*) $\dfrac{\ln\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}$ *g*) $\dfrac{2}{2\sin x+3\cos x}$ *h*) $\dfrac{2x-7}{(x^2-7x+4)^3}$ *i*) $\dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}$