FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CÁTEDRA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

UNIDAD N$^{\text{O}}$3: CÁLCULO DIFERENCIAL EN CAMPOS ESCALARES

1.- Determinar en cada caso el dominio del campo escalar y representarlo gráficamente

a) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

b) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

c) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{1}{x+y+z}$

d) $f(x,y,z)=\ln(xyz)$

e) $f(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{y^2-1}}$

2.- Representar gráficamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares, para los valores de k dados:

a) $f(x,y)=1-x-y, \quad k=-1,0,1,2.$

b) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad k=-1,0,1,3$

c) $f(x,y)=x^2-y, \quad k=-2,-1,0,1,2.$

d) $f(x,y,z)=x-3y-z, \quad k=-1,2,3.$

3.- Analizar la existencia de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+2y^4}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{xy+x^2}$

4.- Muestre que la función $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ no posee límite en los puntos de la recta $y+x=0$.

5.- Determine en cada caso el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual f es continua:

a) $f(x,y)=\ 3x^5+y^3-4x^2y^2+y$

b) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^4+y^4-2x^2y^2}$

c) $f(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

d) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

e) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

6.- A partir de la definición de las derivadas parciales como límites, determinar $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para:

a) $f(x,y)=xy^2-x^3y$

b) $f(x,y)=\frac{x}{x+y^2}$

7.- Se afirma que hay una función $f(x,y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x(x,y)=x+4y$, $f_y(x,y)=3x-y$. Determinar si esto es posible.

8.- Dar un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y un punto en el cual exista f_x, pero no f_y.

9.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Probar que:

a) f no es continua en $(0,0)$.

b) Existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$

c) f no tiene derivadas direccionales en ninguna otra dirección.

10.- Dada $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, y que f no es continua en $(0,0)$

11.- Considerar las funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostrar que son continuas en $(0,0)$.

b) Calcular sus derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$.

c) Investigar su diferenciabilidad en $(0,0)$.

12.- Mostrar que las siguientes funciones son diferenciables en su dominio:

a) $f(x,y) = x^2 - y^3$

b) $f(x,y) = \ln(x-y)\exp(x+y)$

c) $f(x,y) = (x^2+y^2)(1+x^2+y^2)^{-1}$

d) $f(x,y) = \sin(x+y)$

13.- Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

a) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $\quad P_0 = (0,-1)$, $v = (1,2)$

b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $\quad P_0 = (1,0)$, $v = (2,1)$.

c) $f(x,y,z) = x^2yz$, $\quad P_0 = (1,0,-1)$, $v = (-1,1,0)$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad P_0 = (1,1)$, $v = (0,1)$.

14.- Suponer que una montaña tiene la forma de un paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$ (a, b, c constantes positivas), x, y son coordenadas en un plano de referencia y z es la altitud. En el punto $(1,1)$, ¿en qué dirección aumenta más rápido la altitud?. Si se suelta una bolilla en $(1,1)$, ¿en qué dirección comenzará a rodar?.

15.- Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x,y) = 3x^2 - 2y^2$. El insecto está en el punto $(-1,2)$. ¿En qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad?

16.- Un campo diferenciable f tiene en el punto $(1,2)$ derivadas direccionales 2, en dirección al punto $(2,2)$, y -2 en dirección al punto $(1,1)$. Determinar el vector gradiente en $(1,2)$, y calcular la derivada direccional en dirección al punto $(4,6)$.

17.- Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 - 3y^2 - 1$ en el punto $(0,0,z_0)$.

18.- ¿ Por que sería correcto decir que las superficies dadas por las gráficas de las funciones $f(x,y) = x^2+y^2$ y $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ son tangentes en $(0,0,0)$?

19.- Si $F(t) = f(x+ht, y+kt)$ con (x,y) y (h,k) fijos, y donde f se supone con todas las derivadas necesarias, calcular $F'(t), F''(t), F'''(t)$.

20.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $z = x \sin \frac{y}{x}$ en el punto $(a, b, a \sin \frac{b}{a})$ (con $a \neq 0$) . Mostrar que ese plano pasa por el origen.

21.- Se considera el plano $x + 2y + 3z = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$. Hallar los dos planos tangentes al elipsoide y paralelos al plano dado.

22.- Demostrar que las funciones $u(x, y) = e^x \cos(y)$, $v(x, y) = e^x \sin(y)$ satisfacen las ecuaciones (se conocen con el nombre de ecuaciones de *Cauchy-Riemann*)

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

23.- Dada f dos veces diferenciable, se define el *Laplaciano* de f como $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$, las funciones que verifican la ecuación diferencial $\Delta f = 0$ son llamadas *armónicas*. La ecuación $\Delta f = 0$ es la *ecuación de Laplace*. Probar que las siguientes funciones son armónicas:

a) $f(x, y) = e^x \cos y$

b) $f(x, y) = e^x \sin y$

c) $f(x, y) = 3x^2y - y^3$

d) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

e) $f(x, y) = \dfrac{y}{(x^2 + y^2)}$

f) $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

24.- Sea $h(x, y) = f(x + cy) + g(x - cy)$, donde f, g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dos veces derivables y c es una constante no nula. Verificar que h es solución de la ecuación de ondas

$$h_{xx} - \frac{1}{c^2} h_{yy} = 0$$

25.- Mostrar que las siguientes funciones no poseen extremos locales o relativos:

a) $f(x, y) = x^3 + 3x + y^3 + y$

b) $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^3 + 4x + 2y + 9z + 2$

c) $f(x, y, z) = \arctan(x + 2y + 3z)$

d) $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$, con al menos un $a_j \neq 0$

26.- Demostrar:

a) La función de dos variables $f(x, y) = ax^2 + by^2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $ab < 0$, tiene un punto de ensilladura en el origen.
Sugerencia: Mostrar que en cualquier entorno del origen hay puntos donde f es positiva y otros donde es negativa.

b) Generalización. La función de n variables $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$, donde los a_j son no nulos y no todos del mismo signo, tiene un punto de ensilladura en el origen.

27.- Identificar y clasificar los puntos estacionarios (críticos) de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

d) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 1$

f) $f(x, y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2) \exp(2x + 3y)$

g) $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z$

28.- Sea $f(x, y) = 6x^4 - 5x^2y + y^2$. Mostrar que en $(0, 0)$ no hay extremo local.

(Sugerencia: Ver que $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - 3x^2)$ y estudiar el signo de f en un entorno cualquiera del origen.)

29.- Mostrar que la función $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ tiene exactamente un punto estacionario, en el cual f tiene un máximo local. Sin embargo f no tiene máximo en $\mathbb{R}^2$. Es posible esto para funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

30.- Sea $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey$, donde a, b, c, d, e son constantes, $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. Demostrar que existe un punto (α, β) en el cual f toma su mínimo valor en $\mathbb{R}^2$.

31.- Una caja de cartón sin tapa debe contener un volumen de 32000cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan la cantidad de cartón empleada.

32.- Calcular el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, donde a, b, c son números positivos.

33.- Hallar el valor máximo y mínimo del producto de tres números reales x, y, z si su suma debe ser 0 y la suma de sus cuadrados debe ser 1.
Solución: el valor máximo es $\sqrt{6}/18$, cuando dos de los números son $-\sqrt{6}/6$ y el otro es $\sqrt{6}/3$. El valor mínimo es $-\sqrt{6}/18$, cuando dos de los números son $\sqrt{6}/6$ y el otro es $-\sqrt{6}/3$.

34.- Hallar la distancia del punto $(-2, 3, 2)$ a la recta $x - 1 = -(y+1) = z + 1$.
Solución: Distancia es $\frac{\sqrt{258}}{3}$, en el punto $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3})$.

35.- Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\right\}$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

c) $f(x,y) = x^2y^3(1 - x - y)$ en el cuadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$. Solución: el mínimo es $f(-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}) = \frac{-216}{3125}$ y el máximo es $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$.

d) $f(x,y) = \sin x - \cos y$ en el cuadrado $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.