UNIDAD N^{O}4: CÁLCULO INTEGRAL EN CAMPOS ESCALARES

1. Calcule: a) $\int_0^1 \int_y^1 \left(x^2+3y^2\right) dxdy$, b) $\int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1-x^2}dydx$, c) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} dxdy$

2. Supuesta la existencia de las integrales, calcularlas por integración iteradas.

   a) $\int\int_R xy(x+y)dxdy$ donde $R=[0,1]\times[0,1]$
   b) $\int\int_R (\sqrt{y}+x-3xy^2)dxdy$ donde $R=[0,1]\times[1,3]$
   c) $\int\int_R y^{-3}e^{tx/y}dxdy$, donde $R=[0,t]\times[1,t]$, $t>0$

3. En cada caso sea f un campo escalar definido en el rectángulo R. Realice un gráfico del recinto de ordenadas de f sobre R y calcule su volumen por medio de una integral doble. (Supóngase que la integral existe)

   a) $R=[0,2]\times[0,1]$ $f(x,y)=1+2x+2y$
   b) $R=[0,2]\times[0,2]$ $f(x,y)=4-x^2$
   c) $R=[0,1]\times[0,1]$
   $$f(x,y)=\begin{cases} 1-x-y & si \quad x+y\leq 1 \\ 0 & si \quad x+y>1 \end{cases}$$
   d) $R=[-1,1]\times[-1,1]$ tal que
   $$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & si \quad x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & si \quad x^2+y^2>1 \end{cases}$$

4. Esbozar la región de integración, intercambiar el orden de integración y evaluar las siguientes integrales: a) $\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x+y^2)dxdy$ b) $\int_0^1 \int_y^1 (e^{-x^2})dxdy$

5. Sea D la región acotada por la curva de ecuación $y=\sqrt{x}$ y la recta de ecuación $y=x$. Sea $f(x,y)=\frac{\sin y}{y}$ si $y\neq 0$ y $f(x,0)=1$. Calcule $\iint\limits_D f(x,y)dA$.

6. Sea $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\varphi(x)\leq y\leq\varphi(x), a\leq x\leq b\right\}$, donde φ es una función continua y no negativa en $[a,b]$. Dado el campo escalar f continuo en D y tal que $f(x,-y)=-f(x,y)$ para todo $(x,y)\in D$. Mostrar que $\iint\limits_D f(x,y)=0$. Presente otras situaciones similares.

7. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies

   a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ \ x=0,\ \ y=0$ y $z=0$.
   b) $z=0, x+y+z=3$ y $x^2+y^2=1$.
   c) $z=4-x^2,\ \ y=x,\ \ y=0$ y $z=0$.

8. Sea f un campo escalar continuo en $R=[a,b]\times[c,d]$, para $a<x<b$ y $c<y<d$ se define $G(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(u,v)dvdu$. Mostrar que $D_{12}G(x,y)=D_{21}G(x,y)=f(x,y)$.

9. Sea D la región del plano acotada por las rectas $x - 2y = 0,\ x - 2y = -4,\ x + y = 4,\ x + y = 1$. Calcule $\iint\limits_D 3xy dA$.

10. Sea D la región del plano acotada por las curvas $y = x^2 + 4,\ y = x^2,\ y + x^2 = 6,\ y + x^2 = 12$ en el semiplano $x \geq 0$ Calcule $\iint\limits_D xy dA$.

11. Combinar la suma de las integrales en una única integral iterada y evaluar

$$\int_0^{8/\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy\ dydx + \int_{8/\sqrt{13}}^{4} \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy\ dydx$$

12. Calcule las siguientes integrales triples: a) $\int_1^3 \int_0^2 \int_0^4 (x + y - z)\, dV$ b) $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^4 (z \sin x)\, dV$

13. Encuentre el centro de masa de una placa triangular delgada limitada por el eje y y las rectas $y = x$, $y = 2 - x$, si la densidad es $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$.