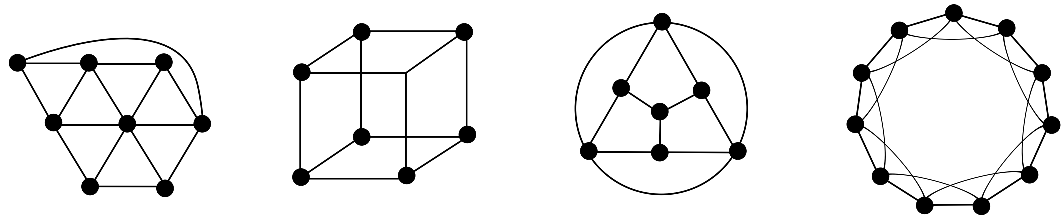
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - U.N.R.

Matemática Discreta (LM-PM) - Complementos de Matemática I (LCC).

Ejercicios prácticos de Coloreo de Grafos.

1. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:



2. Determinar un coloreo por aristas mínimo de los grafos $K_4$, $K_{3,3}$ y Petersen.

3. Un grafo $G$ se dice $k$-*color crítico* si su número cromático es $k$ y el número cromático de todo subgrafo propio de $G$ es menor a $k$.

   ¿Cuales de los grafos del ejercicio 1 son $k$-color crítico?

4. Sea $G$ un grafo $k$-color crítico. Probar que:

   *a*) $G$ es conexo.
   *b*) $\delta(v) \geq k-1$ para todo $v \in V(G)$.
   *c*) $G$ no tiene vértices de corte.

5. Un subconjunto de vértices de un grafo $G$ es un conjunto *estable* (o *independiente*) si sus vértices son no adyacentes dos a dos. Se llama *número de estabilidad*, y se nota $\alpha(G)$, al cardinal máximo de un conjunto estable en $G$, es decir, $\alpha(G) = \max\{|I| : I \text{ es un conj. estable de } G\}$. Si $|V(G)| = n$, probar que:

   *a*) $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.
   *b*) $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.
   *c*) $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.

6. Probar que si $G$ es un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 6$.

7. Demostrar que si $G$ es planar con 8 vértices y 13 aristas, entonces $G$ no es 2-coloreable.

8. Sea $G$ un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$. Probar:

   *a*) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.
   *b*) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$.
   *c*) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

*d)* $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$.

9. Describir los grafos para los cuales sus aristas pueden ser coloreadas con exactamente dos colores.

10. Demostrar que los vértices de la triangulación de un polígono pueden ser 3 coloreables.

11. Realizar los ejercicios 1-4, 7 y 8 de coloreo del Libro *Matemáticas Discreta y Combinatoria* de R. P. Grimaldi.