Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - U.N.R.

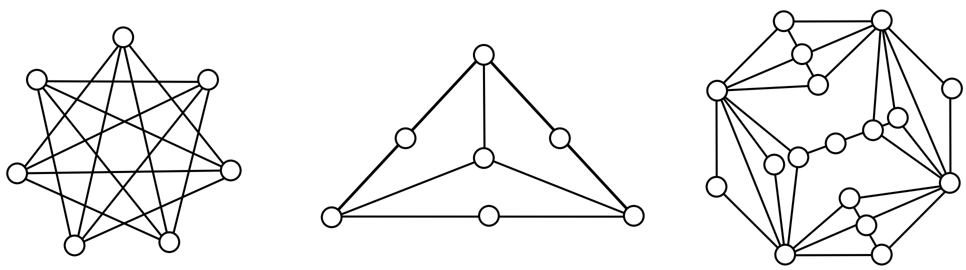
Matemática Discreta (LM-PM).

Ejercicios prácticos: Matching.

1. Las personas A, B, C, D y E son integrantes de un grupo de investigación y presentarán 4 trabajos distintos en un congreso. A, C y D son autores del trabajo 1, C y E son autores del trabajo 2, A, D y E del trabajo 3 y A, B, C y E del trabajo 4. Cada trabajo será expuesto por exactamente uno de sus autores y cada persona presentará a lo sumo un trabajo.

   Modelar esta situación. ¿Qué interpretación tiene un matching maximal en este caso?

2. Hallar un matching máximo en cada uno de los siguientes grafos:



3. Sea G un grafo simple. Determinar la veracidad de los siguientes enunciados:

   a) Si $S \subseteq V(G)$ es saturado por un matching de G entonces S es saturado por todo matching máximo de G.

   b) Si M y M' son matchings de G, entonces el grado de todo vértice en el subgrafo de G inducido por $M \Delta M'$ es a lo sumo 2.

   c) Si G es hamiltoniano entonces G tiene un matching de tamaño $\left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor$.

4. Sea G un grafo bipartito conexo con bipartición (V_1, V_2) tal que $gr(v) \neq gr(v')$ para todo par de vértices v, v' en V_1. Demostrar que existe un matching que satura V_1.

5. Sea G un grafo simple. Probar que S es un conjunto independiente de G si y solo si $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices de G.

   Obtener que $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$, donde $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ es un conj. indep. de } G\}$ y $\beta(G) = \min\{|S| : S \text{ es un cub. por vértices de } G\}$.

6. Para cada $k \geq 2$ construir un grafo simple k-regular sin matching perfecto.

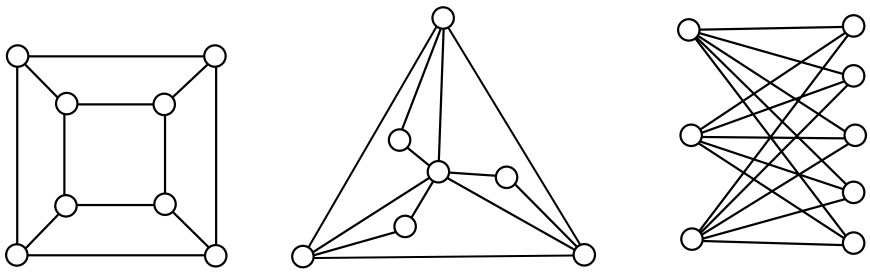
7. Sea G un grafo simple sin vértices aislados. Probar que G tiene un matching de tamaño al menos $\frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$.

8. Probar que todo árbol tiene a lo sumo un mátching perfecto.

9. Un *k-factor* de un grafo G es un subgrafo k-regular recubridor de G. Además, se dice que G es *k-factoreable* si existen k-factores $H_1, \ldots, H_n$ con aristas disjuntas tales que $E(G) = \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i)$.

    a) Probar que $K_{n,n}$ y K_{2n} son 1-factoreables, mientras que el grafo de Petersen no es 1-factoreable.

    b) ¿Cuáles de los siguientes grafos tienen 2-factores?



10. Sean M y N dos matchings de un grafo simple G, con $|M| > |N|$. Probar que existen matchings M' y N' tales que $|M'| = |M| - 1$, $|N'| = |N| + 1$, $M' \cup N' = M \cup N$ y $M' \cap N' = M \cap N$.

11. Sea $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i=1}^{m}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Y. Un *sistema de representantes (SDR)* de $\mathbf{A}$ es un conjunto finito de elementos $a_1, \ldots, a_m$ en Y tal que $a_i \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

    Demostrar que $\mathbf{A}$ tiene un SDR si y solo si $\left|\bigcup_{i \in S} A_i\right| \geq |S|$ para todo $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$.