FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CATEDRA DE ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA II

Licenciatura en Ciencias de la Computación

TRABAJO PRACTICO Nº 2 (primera parte)

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Los símbolos sumatoria y productoria

2.1.- Halle los valores numéricos de las siguientes sumas:

i) $\sum_{k=1}^{5} k$ ii) $\sum_{j=3}^{3} 2^j$ iii) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$ iv) $\sum_{i=0}^{2} (3i-1)$ v) $\sum_{n=2}^{5} 3$

vi) $\sum_{k=-2}^{4} 2^h$ vii) $\sum_{h=-2}^{1}\sum_{k=-1}^{1}(h+2k)$ viii) $\sum_{k=1}^{4}\frac{k!}{3(k+z)!}$ ix) $\left(\sum_{v=-2}^{7}(v-2)\right)!$ x) $\sum_{i=0}^{2}(3j-1)$

2.2.- Halle los valores numéricos de las expresiones anteriores cambiando los símbolos sumatoria por símbolos productoria:

i) $\prod_{k=1}^{5} k$ ii) $\prod_{j=3}^{3} 2^j$ iii) etc…

2.3.- Halle los valores numéricos de las siguientes expresiones

i) $\prod_{i=1}^{4}\prod_{h=-2}^{0}(i+h)$ ii) $\sum_{j=-1}^{1}\prod_{i=-3}^{j}(1-i)$ iii) $\prod_{h=1}^{3}\sum_{k=-1}^{h}(2k-k^2)$ iv) $\prod_{h=1}^{3}\sum_{k=-1}^{h}(2h-k^2)$

2.4.- Determine la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes igualdades:

i) $\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4$

ii) $\sum_{j=0}^{100} 2=100$

iii) $\sum_{n=0}^{100}(2+n) = 2+\sum_{n=0}^{100} n$

iv) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = (\sum_{k=1}^{100} k)(\sum_{k=1}^{100} k^2)$

v) $\sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=0}^{99}(j+1)^2$

vi) $\sum_{n=0}^{100} n^3 = (\sum_{n=0}^{100} n)^3$

2.5.- Ídem ejercicio anterior para el símbolo productoria:

i) $\prod_{n=0}^{100} n^4=\prod_{n=1}^{100} n^4$ ii) etc …

2.6.- Utilizar los símbolos $\sum$, $\prod$ y factorial para expresar:

i) (-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8) ii) $\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1+3-9$ iii) 9.10.11.12.13.14.15

iv) $2.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}$ v) 100.98.96.95.94.93.91

El principio de la inducción matemática

2.7.- Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,

ii) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

iii) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

2.8.- Qué se puede afirmar sobre la validez de los siguientes enunciados?

i) $n!\geq 2^n$

ii) $8|(3^{2n}-1)$

iii) El número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n^2-3n}{2}$

iv) $\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}=1-\frac{1}{2^n}$

v) $2n\leq 2^n$

2.9.- Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) Suma de una **Progresión Aritmética**:

$$a+[a+d]+[a+2d]+\ldots+[a+(n-1)d]=\frac{[a+[a+(n-1)d]]n}{2}$$

ii) Suma de una **Progresión Geométrica**: Si $r\neq 1$

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

Como caso particular, resulta: $1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+...+x^{n-1})$

2.10.- a) Demuestre las siguientes propiedades del símbolo sumatoria:

i) Propiedad de aditividad: $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

ii) Propiedad de homogeneidad: $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

iii) Propiedad telescópica: $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$

b) Utilizando, cuando sea posible, las propiedades obtenidas en a) deduzca las siguientes identidades:

i) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ ii) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ iii) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ iv) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $x \neq 1$

Sugerencias:

ii) Usar el hecho que $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$.

iii) Usar los dos resultados anteriores.

iv) Aplicar la propiedad telescópica a $(1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k$.

2.11.- Demuestre las siguientes propiedades del símbolo productoria:

a) $\prod_{k=1}^{n} a_k . b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k . \prod_{k=1}^{n} b_k$

b) $\prod_{k=1}^{n} c.a_k = c^n . \prod_{k=1}^{n} a_k$

2.12.- Demuestre que el producto de los *n* primeros números naturales impares vale:

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

2.13.- Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

i) $x > -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$

ii) $2^n > n$

iii) Si $n \geq 2$, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 < (n+1)^3 / 3 < 1^2 + 2^2 + ... + (n+1)^2$

2.14.- ¿Para qué valores naturales de n resulta $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$? Demostrar que la respuesta es correcta.

2.15.- ¿Para qué números naturales *n* es cierta la desigualdad $2^n > n^2$? Demostrarlo por inducción.

2.16.- Dada la proposición:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2 ,$$

a) Demuestre que si *P*(*k*) es verdadera para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

b) Analice la siguiente proposición
"De a) y del principio de la inducción matemática sigue que *P*(*n*) es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$".

c) Transforme la proposición *P*(*n*) cambiando la igualdad en una desigualdad de manera que sea cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.17.- Observe que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Conjeture una ley general sencilla que incluya las anteriores como casos particulares y demuéstrela mediante el principio de inducción.

2.18.- Presentamos una demostración, por inducción, de la proposición:

"Todo conjunto de *n* bolas de billar está formado por bolas del mismo color".

Base de la inducción: Para $n = 1$ la afirmación es trivialmente verdadera.
Paso de inducción: Supongamos que tenemos $k+1$ bolas de billar que numeramos $1,2,\ldots,k,(k+1)$.
De acuerdo con la hipótesis de inducción, las bolas $1,2,\ldots,k$ son del mismo color; además, por la misma razón, las bolas $2,\ldots,k,(k+1)$ son del mismo color. En consecuencia, las bolas $1,2,\ldots,k,(k+1)$ son del mismo color.
¿Dónde está el error en esta demostración?

Trabajo Práctico 1 (segunda parte).

El Principio de Inducción Matemática.

Álgebra y Geometría Analítica II (LCC) – Año 2013

<u>Nota:</u> cuando no se especifique otra cosa, Σ será un alfabeto cualquiera dado.

1. Consideremos el alfabeto $\Sigma = \{0,1,2\}$ y las siguientes cadenas de $\Sigma^+ : p = 01, q = 212$ y $r = 01212$.

   a) Completar: $\|r\| = \dots,\qquad \|p\| + \|q\| = \dots$

   b) Prueba que, en general, dadas $p, q \in \Sigma^+$ es: $\|pq\| = \|p\| + \|q\|$.

   c) Justifica que: $\|\lambda p\| = \|p\|$.

   d) Prueba el apartado 1*b*) para cadenas $p, q \in \Sigma^*$.

2. *a*) Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}, \Sigma^n$ es el conjunto de todas las cadenas sobre Σ de longitud n. (Sugerencia: hacerlo por inducción.)

   b) Si con $|A|$ representamos el cardinal del conjunto A, prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$: $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$ (Sugerencia: hacerlo por inducción.)

   c) Si Σ es al alfabeto del Ejercicio 1, ¿cuánto valen $\left|\Sigma^2\right|$ y $\left|\Sigma^4\right|$?

3. Consideremos el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.

   a) ¿Cómo puedes justificar que que $ab\lambda ad \in \Sigma^+$ (es decir, que $ab\lambda ad$ es una cadena distinta de la cadena vacía)? ¿Cuál es su longitud?

   b) Repite el apartado anterior para $a\lambda ec\lambda\lambda bbad\lambda$.

4. *a*) Esboza una prueba (informal) de los siguientes hechos:

      1) la concatenación de cadenas de Σ^* es una operación *cerrada* en Σ^*, esto es: si $p, q \in \Sigma^*$ entonces $pq \in \Sigma^*$ (propiedad de *clausura*);

      2) para cualesquiera $p, q, r \in \Sigma^*$ se verifica que $p\,(qr) = (pq)\,r$ (prop. *asociativa*).[1]

   La asociatividad hace que para toda cadena $p \in \Sigma^*$, tengan sentido los símbolos p^n para todo $n \in \mathbb{N}_0$, los cuales definimos inductivamente así: i) $p^0 := \lambda$, y ii) supuesto definido p^n definimos $p^{n+1} := pp^n$.

   b) Considera $\Sigma = \{0,1\}$ y sea $p = 01$. Obtiene:

   $$p^0 = \dots,\qquad p^1 = \dots,\qquad p^2 = \dots,\qquad p^3 = \dots$$

   Completa: para todo $n \in \mathbb{N}, p^n$ es una cadena que tiene ... ceros y ... unos, donde el primer carácter es ...

[1] En álgebra abstracta, la clausura y la asociatividad de la concatenación de cadenas hacen de ésta una *operación binaria* en Σ^+ que le da a Σ^+ estructura de *semigrupo*. Asimismo, el hecho adicional de que $p\lambda = \lambda p = p$, hace que Σ^* sea un *monoide* (o sea, un *semigrupo* con *identidad* λ).

c) Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}_0 : \|p^n\| = n\,\|p\|$. (Sugerencia: hacerlo por inducción.)

d) Si $p \in \Sigma^*$ y $\left\|p^3\right\| = 36$, ¿cuál es la longitud de p?

5. *a*) Sea $\Sigma = \{v, w, x\}$ y $p \in \Sigma^*$ tal que $p = vwwxxx$. Exhibe todos los prefijos de p y todos los sufijos propios de p.

   b) Exhibe todas las subcadenas de p. Procede ordenadamente: primero considera la subcadena vacía λ (muestra que λ es una subcadena de p –la subcadena de longitud 0–), luego exhibe todas las subcadenas de longitud 1, luego las de longitud 2, etc.

   c) Sea $p \in \Sigma^+$ de la forma $p = a_1 a_2 \cdots a_n$ con $a_i \in \Sigma$ (para $i = 1, 2, \ldots, n$). Entonces p tiene (completar):

   - … prefijos, que son las cadenas …, de las cuales todas, excepto …, son prefijos propios de p.
   - … sufijos, que son las cadenas …, de las cuales todas, excepto …, son sufijos propios de p.

   Completar: la cadena … es prefijo y sufijo de p a la vez.

6. Prueba que si $p, a, b, c, d \in \Sigma^*$ son tales que: $p = ab = cd$, entonces:

   a) a es prefijo de c o c es prefijo de a.

   b) b es sufijo de d o d es sufijo de b.

7. Considera el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Da ejemplos de conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ tales que satisfagan los siguientes conjuntos de cláususlas:

   a) 1) $0 \in A$
   2) si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$

   b) 1) $2 \in A$
   2) si $n \in A$ entonces $n + 2 \in A$

   c) 1) $3 \in A$
   2) si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$ y $n - 1 \in A$

   d) si $n + 1 \in A$ entonces $n \in A$

8. Define inductivamente cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.

   b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

   c) El conjunto de los números naturales que sean potencias de 2.

9. Define inductivamente el conjunto Σ^* para $\Sigma = \{a, b, c\}$.

10. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $\pi \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por:

    a) $\lambda \in \pi$

    b) si $w \in \pi$ entonces $bwbc \in \pi$ y $bwba \in \pi$

    Da tres palabras de Σ^* que pertenezcan a π y tres que no pertenezcan.

11. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $\Gamma \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por:

    a) $\lambda \in \Gamma, a \in \Gamma$

b) si $w, w' \in \Gamma$ entonces $bwcw'b \in \Gamma$

Enuncia el principio de inducción primitiva para Γ.

Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$bcb \in \Gamma, \qquad bacab \in \Gamma, \qquad bccb \in \Gamma, \qquad bacbcbb \in \Gamma.$$

12. Define inductivamente cada uno de los siguientes conjuntos:

    a) $\{b\}^*$

    b) $\{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

    c) $\{\lambda, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots\}$

    d) $\{w \in \{1,2,3\}^* \mid w \text{ es capicúa}\}$

13. Considera el conjunto N definido inductivamente por:

    a) $0 \in N$

    b) si $n \in N$ entonces $n + 1 \in N$

    Enuncia el principio de inducción primitiva para N.

    Prueba, utilizando este principio, que para todo $n \in N, n^2 + n$ es par.

14. Considera el conjunto P definido inductivamente por

    a) $0 \in P$

    b) si $n \in P$ entonces $n + 2 \in P$

    Prueba que para todo $n \in P$ existe un m tal que $n = m + m$.

15. Considera el conjunto T definido inductivamente por

    a) $1 \in T$

    b) si $n \in T$ entonces $2n \in T$

    Determina T por comprensión.

    Enuncia el principio de inducción primitiva para T.

    Prueba, utilizando este principio, que para todo $n \in T$, si $n > 1$ entonces n es par.

16. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $\Gamma \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por:

    a) $\lambda \in \Gamma$

    b) si $w \in \Gamma$ entonces $bwbc \in \Gamma$ y $bwba \in \Gamma$

    Enuncia el principio de inducción primitiva para Γ.

    Determina cuáles de las siguientes afiramciones son verdaderas:

    - Si $w \in \Gamma$ entonces $\|w\| > 0$.
    - Si $w \in \Gamma$ entonces $\|w\|$ es par.
    - Si $w \in \Gamma$ entonces $\|w\|$ es múltiplo de tres.

17. Sea S un conjunto de números reales tal que:

   i. $3 \in S$, y

   ii. si $n \in S$ entonces $2n \in S$.

   a) Exhibe tres conjuntos S, distintos, cuyos elementos verifiquen i. y ii.

   b) Sea $T = \{3 \cdot 2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Prueba que $T \subseteq S$.

   c) ¿Qué condición adicional habría que establecer, sobre S, para que sea $T = S$?

18. *a*) Sea S un conjunto de números reales tal que:

   i. $2 \in S$, y

   ii. si $n \in S$ entonces $\frac{1}{2}(n+6) \in S$.

   b) Exhibir al menos tres conjuntos S, distintos, cuyos elementos verifiquen i. y ii.

   c) Sea $T = \left\{6 - \frac{1}{2^{n-3}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Probar que $T \subseteq S$.

   d) ¿Qué condición adicional habría que establecer, sobre S, para que sea $T = S$?

19. *a*) Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ una función tal que:

   i. $f(0) = 0$, y

   ii. para todo $n \in \mathbb{N}_0, f(n+1) = f(n) + n + 1$.

   b) Calcula $f(1), f(2)$ y $f(3)$.

   c) Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}_0, f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2: OTRAS OPERACIONES EN V_3. EL PLANO Y LA RECTA EN EL ESPACIO

I. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO.

3.1 Siendo $\vec{u} = (3,-1,-2)$ y $\vec{v} = (1,2,-1)$ calcular:

a. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ **b.** $(\vec{v} + 2\vec{u}) \wedge \vec{v}$ **c.** $(\vec{v} - 2\vec{u}) \wedge (4\vec{u} - 2\vec{v})$.

3.2 Determinar las componentes de un versor que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\vec{a} = (3,-1,5)$ y $\vec{b} = (-2,1,0)$. ¿Cuántos hay?

3.3 Hallar las componentes de un vector $\vec{v}$ del que se sabe que $|\vec{v}| = 8$, $\vec{v} \perp \vec{a} = (7,-2,4)$, $(\widehat{\vec{v},\vec{i}})$ es agudo y $\vec{v}$ es perpendicular al eje z.

3.4

a. Dados $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$ encontrar un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$.
¿Cuántas soluciones existen?

b. Ídem a. para $\vec{c} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$

3.5 Sabiendo que $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$, y $\vec{a} \times \vec{b} = 12$ calcular $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$.

3.6 Calcular $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ en cada uno de los siguientes casos:

a. $\vec{a} = (3,0,-2)$; $\vec{b} = (5,2,4)$; $\vec{c} = (-1,-1,3)$.

b. $\vec{a} = (1,2,0)$; $\vec{b} = (4,-3,3)$; $\vec{c} = (-6,1,2)$.

c. $\vec{a} = (2,5,1)$; $\vec{b} = (3,1,-2)$; $\vec{c} = (-1,4,3)$.
Interpretar gráficamente los resultados.

3.7 Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1,4)$, $\vec{v} = (1,2,\alpha)$ y $\vec{w} = (2,-2,3)$ hallar α de manera que el volumen del paralelepípedo que ellos determinan sea igual a 31 unidades. Antes de iniciar el cálculo de α discutir cuántas soluciones podría tener un problema como éste (0; 1; 2 o más) y a qué casos geométricos corresponderían. Obtener todos los α posibles en este caso.

3.8 Hallar $\lambda \in \Re$ que logre que un vector de la forma $(1,\lambda,11)$ sea coplanar con $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

3.9 Dados $\vec{u}$ y $\vec{w} \in V_3$, no nulos, probar que existe $\vec{v} \in V_3$ tal que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ si y sólo si $\vec{u} \times \vec{w} = 0$.
¿Cuántas soluciones $\vec{v}$ existen?

3.10 Dar una condición necesaria y suficiente para que 4 puntos del espacio $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ sean coplanares.

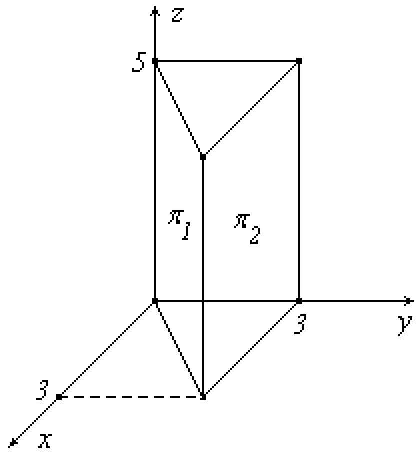
II. PLANO

3.11 Hallar las ecuaciones de los planos que satisfacen las siguientes condiciones:
a. Es perpendicular al vector $\vec{u}=(3,-1,-2)$ y contiene al punto $A(5,2,-1)$.
b. Es perpendicular al vector $\vec{v}=(4,2,-4)$ y dista 9 unidades del origen de coordenadas.
c. Es paralelo al plano $\pi)\, 3x-7y+2z=2$ y contiene al punto $B(2,-1,5)$.
d. Es paralelo a los vectores $\vec{u}=(1,-2,2)$ y $\vec{v}=(-1,0,3)$ y contiene al punto $C(0,0,1)$.
e. Contiene a los puntos $D(1,5,2)$, $E(-1,9,3)$ y $F(7,-1,2)$.

3.12 Dada la familia de planos de ecuación $\alpha x+2\alpha\, y+10z-2=0,\ \alpha\in\Re$, encontrar, si existe, cuál de ellos verifica:
a. Es paralelo al plano de ecuación $x+2y+8z-7=0$.
b. Es paralelo al plano de ecuación $-x+y-3z+1=0$.
c. Es perpendicular al plano $-5x+y-3z+2=0$.
d. Forma con el plano $4y+3z-9=0$ un ángulo cuyo coseno es $\frac{14}{15}$.

3.13
a. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,-2,2)$, $P_2(-3,1,-2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $2x+y-z+6=0$.
b. Hallar un punto P_3 tal que el problema análogo al a. planteado con P_1 y P_3 tenga infinitas soluciones.

3.14
a. Hallar las ecuaciones de los planos que contienen, cada uno, a una cara distinta del prisma de la figura.
b. Hallar el ángulo α entre los planos proyectantes π_1 y π_2.
c. Determinar si el punto $A(1,2,4)$ es interior al prisma. Justificar.



3.15 Hallar la intersección de los siguientes planos:
$\pi_1)\, 2x+4y+2z=3$, $\pi_2)\, 3x+3y-z=0$ y $\pi_3)\, 3x-6y-5z=8$.

3.16 Dados los planos de ecuaciones $\pi_1)\, 3x-2y+4z+1=0$, $\pi_2)\, x+z=5-2y$ y $\pi_3)\, 4y+4=8z+6x$, hallar dos puntos que pertenezcan a su intersección. En caso de no existir, hallar dos puntos de cada intersección $\pi_i\cap\pi_j,\ i\neq j$. En caso de no existir, hallar la distancia entre los correspondientes planos.

3.17 Dar ejemplos de cada una de las situaciones posibles en el problema de hallar la intersección de 3 planos (sin resolverlos).

3.18
a. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por tres puntos no alienados $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Analizar cuáles de estos puntos satisfacen esta ecuación si P_1, P_2 y P_3 están alineados.

b. Usando **a.** encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos

$$P_1(3,2,-5),\ P_2(0,1,-1) \text{ y } P_3(2,5,-1).$$

III. LA RECTA EN EL ESPACIO.

3.19 Hallar las ecuaciones de la recta determinada por los puntos $A(3,1,-2)$ y $B(1,-3,5)$.

3.20 Describir los lugares geométricos que corresponden a las siguientes ecuaciones:

a. $(2x+3y+4z-1)^2+(\alpha x+3y+4z-1)^2=0$ para cada valor de $\alpha \in \Re$.

b. $(2x+3y+4z-1)^2-(\alpha x+3y+4z-1)^2=0$ para cada valor de $\alpha \in \Re$.

3.21 Dados los vértices de un triángulo $A(1,-2,4)$, $B(3,1,-3)$ y $C(5,1,-7)$ hallar las ecuaciones de la recta que contiene la altura trazada desde el vértice B al lado opuesto.

3.22 Hallar la proyección ortogonal del punto $C(3,-4,2)$ sobre el plano determinado por las rectas

$$r_1)\ \frac{x-5}{13}=y-6=\frac{z+3}{-4} \quad \text{y} \quad r_2)\ \frac{x-12}{13}=y-3=\frac{z+3}{-4}.$$

3.23 Determinar los puntos de la recta $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x-y+3z=0 \end{cases}$ que se encuentran a 5 unidades del plano $2x-2y+3z=0$.

3.24 Hallar las ecuaciones de la recta r_1 que contiene al punto $M(3,-2,-4)$, es paralela al plano $\pi)\ 3x-2y-3z=7$ y se interseca con la recta $r_2)\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.
¿Qué ángulo forman r_1 y r_2?

3.25 Hallar la ecuación del plano que contiene al punto simétrico de $A(1,2,3)$ respecto de la recta $r_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=z-2$ y que además contiene a la recta $r_2)\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ x-y+z=0. \end{cases}$

3.26 Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,2,3)$ y que además se interseca con las rectas

$$r_1)\ \frac{x}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{4} \quad \text{y} \quad r_2)\begin{cases} 2x+3y-z+1=0 \\ x-y+3z-4=0. \end{cases}$$

3.27

a. Hallar el valor de k de modo que las rectas

$$r_1)\begin{cases} x=-3+t \\ y=2-kt \\ z=1+4t \end{cases} \quad t\in\Re \quad \text{y} \quad r_2)\ \frac{x-1}{2}=-y=z \quad \text{resulten coplanares.}$$

b. Para dicho valor de k hallar, si es posible, las coordenadas del punto de intersección.

c. Hallar la ecuación de un plano paralelo al determinado por las rectas r_1 y r_2 y cuya distancia al origen de coordenadas es de 3 unidades. ¿Existe única solución?

3.28

a. Determinar si las rectas

$$r_1)\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=3+3t \end{cases} \quad t\in\Re \quad \text{y} \quad r_2)\begin{cases} x=1-3r \\ y=2r \\ z=2+4r \end{cases} \quad r\in\Re \text{ son o no coplanares.}$$

b. Calcular la distancia entre r_1 y r_2.

3.29 Hallar la ecuación del plano τ que proyecta la recta $r)\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-3y+2z-2=0 \end{cases}$ sobre el plano $\pi)\ x+2y+3z-5=0$.

3.30 Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F):

a. La recta $r_1)\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=4-t \end{cases} \quad t\in\Re$ se encuentra a $\sqrt{21}$ unidades del origen.

b. El punto de la recta r_1 que se encuentra más próximo al origen de coordenadas es $A\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$.

c. El plano $\pi)\, x-y=1$ contiene a la recta r_1.

ÁLGEBRA y GEOMETRÍA I - L.C.C

PRACTICA 3: Combinatoria

Año 2009

REGLAS DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO. PERMUTACIONES

1. Ejercicios de los párrafos 1.1 y 1.2 del Grimaldi: 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 28, 32, 35 y 38.

COMBINACIONES

2. Ejercicios del párrafo 1.3 del Grimaldi: 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22 y 23.

3. Ejercicios del párrafo 1.4 del Grimaldi: 1, 4, 6, 12, 15 y 27.

PRINCIPIO DE LAS CASILLAS

4. Demuestre que si se escogen siete números del 1 al 12, dos de estos sumarán 13.

5. Demuestre que si se escogen ocho números positivos cualesquiera, dos de ellos tendrán el mismo resto al ser divididos por 7.

6. Si se pintan 50 bicicletas usando siete colores, ¿Cuantas bicicletas, al menos, tendrán el mismo color?

7. Seis amigos tienen un total de 21,61 pesos para ir al cine. Demuestre que al menos uno debe tener 3,61 pesos.

8. Demuestre que debe haber por lo menos 90 maneras de escoger seis números del 1 al 15 de modo que todas las selecciones al sumarse den el mismo resultado.

9. ¿Cuántos amigos debe tener usted para garantizar que por lo menos cinco de ellos cumplen los años en un mismo mes?
10. Demuestre que si se escogen 14 números cualesquiera del 1 al 25, uno de ellos es múltiplo del otro.
11. Sobre una mesa se colocan 20 tarjetas numeradas del 1 al 20, con la cara hacia abajo. Las tarjetas son seleccionadas una a la vez y volteadas hasta haber elegido 10 de ellas. Si dos tarjetas de las elegidas suman 21, el jugador pierde. ¿Es posible ganar en este juego?. Si se cambian las reglas y se deben escoger 12 cartas, ¿se podrá ganar?

SUMATORIA. BINOMIO DE NEWTON

12. Ejercicios del párrafo 1.3 del Grimaldi: 18, 19, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37 y 38.

EJERCICIOS ADICIONALES

13. Ejercicios complementarios del capítulo 1 del Grimaldi: 6, 8, 13, 15, 18 y 29.
14. De un mazo de 40 cartas se extraen 6. ¿Cuántas extracciones distintas se pueden hacer:
    a) que contengan 5 bastos por los menos?
    b) que no contengan los 4 ases?
15. ¿Cuántos números distintos se pueden escribir con los dígitos 2, 3, 5, y 7 menores que 5000?
16. De un grupo de 10 personas, se quiere formar una comisión de 5 personas de manera que dos de ellas (Carlos y María) no estén juntos en la comisión ¿Cuántas comisiones distintas pueden formarse?
17. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una hilera 2 chicos y 4 chicas si:
    a) los chicos quieren sentarse juntos y las chicas también?
    b) entre los chicos debe haber exactamente 3 chicas?
18. Marina cumple años y va a hacer una reunión en su casa. Tiene dos grupos de conocidos, los de la facultad y los del club. Los de la facu son 12 y los del club, 9, pero en su casa sólo entran 10 personas, además de ella. Responde:
    a) ¿De cuántas formas puede hacer la invitación?

b) ¿De cuántas formas puede hacerlo si Ana y Manuel, dos de ellos, estuvieran peleados y no pudieran compartir una reunión?

c) ¿De cuántas formas puede hacer la invitación, si decide invitar a 5 personas del club y 5 de la facu?

19. En la navegación, las señales de barco a barco se hacen izando 7 mástiles, 7 banderas de las cuales 2 de ellas son azules, 2 rojas y 3 blancas, en algún orden. ¿Cuántos mensajes distintos pueden formarse?

20. Dados 5 números positivos y 6 negativos:

    a) ¿Cuántos productos de tres factores distintos pueden formarse con ellos?

    b) ¿Cuántos de estos productos son positivos?

21. Nacho y Emma nunca recuerdan sus números de socios del club. Estos constan de 6 números.

    a) Nacho sabe que el suyo tiene exactamente 2 'unos', 3 'sietes', y un 'cinco' ¿Cuántas posibilidades hay para el número de socio de Nacho?

    b) Emma, en cambio recuerda que el suyo tenía todas las cifras distintas y que no figuraban ni el 0 ni el 1 ¿Cuántas posibilidades hay para el suyo?

22. Hernán tiene 5 sobrinos y compra 5 juguetes para regalarle uno a cada uno.

    a) ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo si todos los juguetes son distintos entre sí?

    b) ¿De cuántas maneras puede hacerlo, si compró 2 pelotas iguales entre sí, y 3 autitos iguales entre sí?

23. ¿De cuántas formas distintas puede repartir Hernán 9 pelotas iguales entre sus 5 sobrinos?

24. ¿De cuántas formas distintas se puede responder una evaluación de 15 preguntas de múltiple choice, donde cada una tiene 3 posibilidades?

25. Alicia, Beto, Ceci, Diego y Eliana van al cine y tienen reservados 5 asientos consecutivos de una fila. Contesta:

    a) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse?

    b) ¿De cuántas meneras distintas pueden hacerlo, si las chicas quieren sentarse juntas?

    c) Si no hubiese ido Eliana, ¿de cuántas formas hubieran podido sentarse, si tenían a disposición los 5 asientos reservados?

26. Los códigos de ciertos productos se forman eligiendo 3 letras distintas entre las letras: A, B, C, D, E, y F y dos números distintos, distintos de cero. ¿Cuántos productos pueden codificarse de esta forma, como máximo?

27. En una panadería, donde hay sacramentos, vigilantes, medialunas, jesuitas y rosquitas, ¿de cuántas formas puedo elegir una docena de facturas? (suponemos que de todas las clases hay por lo menos 12).

28. Halla **todos** los valores posibles para n en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $84.C_{n,2} = \frac{A_{n,5}}{n-4}$

b) $\binom{26}{n+6} = \binom{26}{n^2}$

c) $A_{n,3} = 12.C_{n+1,3} - P_4.n.(n-1)$

d) $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{3}$

e) $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

f) $60C_{n,n-3} = \frac{1}{3}A_{n+2,5}$

g) $A'_{n,2} = n.P_6^{2,3}$

h) $\binom{14}{3n-2} = \binom{14}{-n+6}$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4: MATRICES Y DETERMINANTES

4.1 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3&2&-1\\4&5&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-1&0&2\\4&3&-2\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1&0&5\\-1&2&2\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}2&-1&0\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}0&2&-1&0\\2&2&0&2\\1&0&1&0\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}2&-1&0&2\\3&2&3&-1\\5&3&2&3\\4&0&-1&4\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\4\end{pmatrix}$$

indicar cuáles de las siguientes operaciones están bien definidas y realizarlas:

a. $C + D$
b. $B - C + 3A$
c. $B + C$
d. $2A-\frac{1}{2}B$
e. $C-D+\frac{3}{2}(D+E)$
f. HJ
g. JH
h. FG
i. GF
j. $AB-BA$
k. AC
l. $CA - AC$
m. $B(2C-E)$
n. FGJ
o. $2BC-BE$

4.2 Calcular $AB-BA$, siendo $A=\begin{pmatrix}i&2i&-i\\2&4&2\\1&2-i&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1&i\\-4&2&0\\i&-2i&1\end{pmatrix}$

4.3

a. Comprobar que las identidades $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ y $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ no son ciertas para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\qquad\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

b. Obtener identidades válidas para todo par de matrices cuadradas.
c. ¿Para qué matrices cuadradas son válidas las identidades dadas en a.?

4.4 Hallar todas las matrices $\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ que conmuten con $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

4.5 Dada $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ hallar, en cada caso, todas las matrices A reales de orden 2 que satisfacen la condición dada:

a. $AB = 0$
b. $BA = 0$
c. $A^2 = 0$

4.6 Si A y B son matrices de orden 3, analizar la validez o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando la respuesta:
a. Si la 1ª y 3ª columnas de B son iguales, también lo son la 1ª y 3ª columnas de AB.
b. Si la 1ª y 3ª filas de B son iguales, también lo son la 1ª y 3ª filas de AB.
c. Si la 1ª y 3ª filas de A son iguales, también lo son la 1ª y 3ª filas de AB.

4.7 Hallar todas las matrices de orden 2 tales que $A^2 = I$

4.8 Demostrar que si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n.\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

4.9 Determinar si las siguientes matrices son inversibles y, en caso de serlo, calcular la inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.10 Probar que una matriz de orden n que tiene una fila o columna de ceros no es inversible.

4.11 ¿Cuándo una matriz diagonal es inversible?, y, en ese caso, ¿cuál es su inversa?

4.12 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz P inversible, tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.13 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a. $BXA^{-1} = C$
b. $AX + 2B^T = -3C$
c. $XB = C + X$
d. $AX = C + X$
e. $AX = C + BX$
f. $\frac{1}{2}XA + B = \frac{3}{2}X - C$

4.14 Analizar la validez o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando la respuesta:
a. $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \ o \ B = 0$
b. $AX = AY \Rightarrow X = Y$
c. A y B simétricas y $AB = BA \Rightarrow AB$ simétrica
d. A y B inversibles $\Rightarrow A + B$ inversible
e. $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

4.15 Calcular los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 2+i & 1 & -i \\ 0 & i & 3+i \\ 1-i & 2i & 2-i \end{vmatrix}$$

$$E=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \qquad F=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} \qquad G=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$H=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad J=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

4.16 Resolver las siguientes ecuaciones en la variable *x*:

a. $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=0$ **b.** $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 2 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 2 & 1 & 1-x \end{vmatrix}=0$ **c.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & c \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix}=0$ **d.** $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 2 & 1 & -2 & x \\ 4 & 1 & 4 & x^2 \\ 8 & 1 & -8 & x^3 \end{vmatrix}=0$

4.17 Calcular λ para que la siguiente ecuación tenga raíces reales e iguales: $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ \lambda & -1 & 2x \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

4.18 Calcular λ para que la siguiente ecuación tenga raíces reales: $\begin{vmatrix} x-1 & x & \lambda \\ 0 & x & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$

4.19 Analizar la relación existente entre los siguientes determinantes. Justificar la respuesta.

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & \pi & 7 \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & \pi & -1 \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} -1 & \pi & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}$$

4.20 Calcular los siguientes determinantes, transformando en ceros la mayor cantidad posible de elementos de una fila o columna:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-w \end{vmatrix}$

4.21 Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a. Verificar que $a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0$

b. Generalizar para cualquier fila o columna.

4.22 Sin desarrollar el determinante, demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

4.23 Determinar, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

a. *A, B, C, E* y *F* del ejercicio 3.1

b. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4.24 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = A - \alpha I$. Hallar los valores de α de modo que *B* no sea inversible.

4.25 Resolver, si es posible, las siguientes ecuaciones matriciales:

a. $A^{-1} = XA$, siendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A^{-1}X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c. $AX = B + X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4.26 Sean $A, B \in M_4$ tales que $\left|A^{-1}B^T\right| = 48$ y $|A| = \frac{1}{2}$, determine si B es inversible.

4.27 Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ halle:

a. Una matriz *X* que verifique $X + BA = A^T B^T X$

b. Condiciones necesarias y suficientes sobre *a* y *b* para que la matriz *AC – D* resulte inversible

c. Una matriz *E* de orden 3 tal que $\det(E) = \det(AB)$ y $e_{21} = e_{22} = e_{23} = 5$

4.28 Sean $A, B, C \in M_3$ tales que $\left|A^T\right| = 2$, $\left|B^{-1}\right| = -3$ *y* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, calcule, cuando sea posible, los determinantes de las siguientes matrices:

$P = AC + BC, \quad Q = 3A^{-1}B, \quad R = B^4, \quad S = C^T - BC^T, \quad T = A + A + 3A, \; U = AB + (AB)^T$

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CATEDRA DE ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA II

LICENCIATURA. EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1 Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales:

i. $3x - 5 - x = 2x + 2y + 5$	**v.** $x + y + z = 1 + y$
ii. $2x + 3y - x = x + 3y - 1$	**vi.** $x + y + z = 1 - y - w + 1$
iii. $x - y^{-1} + z = 5$	**vii.** $xy + z = x - y$
iv. $1 + x + y + z = 1$	**viii.** $x^{\frac{1}{2}} + x = 1 - x$

5.2 Para cada ecuación del ejercicio 6.1 que haya sido lineal:

a. escribir sus coeficientes, su término constante y su ecuación homogénea asociada,
b. ordenar sus variables y decir cuál es la variable delantera y cuáles son las variables libres,
c. determinar, si es posible, la solución general y dos soluciones particulares.

5.3 Encontrar los valores de α, tales que cada una de las siguientes ecuaciones tenga:

i. exactamente una solución **ii.** infinitas soluciones **iii.** ninguna solución

a. $\alpha^2 x - 2 = 4x + \alpha$
b. $(\alpha^2 - 4)x = 3$
c. $(\alpha^2 - 4)x = 0$
d. $\alpha x - \alpha^2 y = 3\alpha$

5.4 Replantear el siguiente sistema lineal en forma canónica: $\begin{cases} 2x + 4z + 1 = 0 \\ 2z + 2w - 2 = x \\ -2x - z + 3w = -3 \\ y + z + t = w + 4 \end{cases}$ y determinar:

a. La matriz de coeficientes
b. El vector de constantes
c. La matriz aumentada
d. El sistema homogéneo asociado.

5.5 Aplicar la sustitución hacia atrás para resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +\,2x_2 & +\,x_3 & & +\,x_5 & & = -1 \\ & & -\,2x_3 & & & +\,x_6 & = 2 \\ & & & 4x_4 & -\,2x_5 & & = 0 \end{array}\right.$

5.6 Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -5 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a. Escribir un sistema cuya matriz aumentada se *M*.
b. Encontrar el sistema homogéneo asociado al sistema lineal de la parte a.
c. Encontrar la solución general de los sistemas de las partes a. y b.

5.7 Determinar cuáles de los siguientes sistemas son consistentes y calcular sus soluciones generales:

a. $\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + y + 3z = 10 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 3y + z - w = 0 \\ 3x + y + 3z = -2 \\ 2x + 6y + 2z - 2w = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3y + z = -9 \\ 3x + y = -8 \\ 3x + 7y + 2z = -26 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ z + w = 1 \\ x + w = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + z = 5 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = -\frac{5}{3} \end{cases}$

5.8 Dado el sistema lineal homogéneo: $\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$

a. Demostrar que si $x = x_0$ y $y = y_0$ es una solución ese sistema, también lo es $x = k\,x_0$, $y = k\,y_0$, para cualquier k constante.

b. Comprobar que si $x = x_1$, $y = y_1$ y $x = x_2$, $y = y_2$ son dos soluciones, entonces también lo es $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$

5.9 Demostrar que si $ad - bc \neq 0$, la forma de escalón reducida de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es *I*.

5.10 Considerar el sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

a. Sea $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, demostrar que:

i. El sistema tiene exactamente una solución. Calcular esta solución.

ii. El sistema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial.

b. Sea $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, demostrar que:

i. El sistema tiene infinitas soluciones o no las tiene.

ii. El sistema homogéneo asociado tiene soluciones no triviales

5.11 Determinar la forma de escalón reducida de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.12 Resolver los siguientes sistemas lineales con el método de eliminación de Gauss:

a. $\begin{cases} x + z + w = -5 \\ x - z + w = -1 \\ x + y + z + w = -3 \\ 2x + 2z = -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_4 = 9 \\ -2x_1 + 16x_2 - x_3 - 20x_4 = -24 \\ 2x_1 - 16x_2 + 6x_3 + 50x_4 + x_5 = 51 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ x \quad\quad + w = -1 \\ \quad y - z - w = 1 \\ x + 2y \quad\quad = -3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y + z + w - t = 1 \\ \quad y \quad\quad = -1 \\ \quad -2z - w + t = -3 \\ \quad\quad w - 3t = -1 \\ \quad\quad\quad t = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 3x + 3y + 3z + 4w = 0 \\ 4x + 4y + 4z + 4w = 0 \end{cases}$

5.13 Calcular los valores de α para que los sistemas cuyas matrices aumentadas se indican tengan:
i. exactamente una solución **ii.** infinitas soluciones **iii.** ninguna solución

a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & \alpha & 8 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & \alpha^2 - 8 & \alpha \end{bmatrix}$

5.14 Determinar α para que el sistema homogéneo $\begin{cases} (\alpha - 1)x - 2z = 0 \\ x - \alpha\, y + (\alpha + 2)z = 0 \\ -x + (\alpha + 1)y - 2z = 0 \end{cases}$ tenga soluciones no triviales.

5.15 Analizar, en función de α y β, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = \alpha \\ 2x + 3y + \beta\, z + 1 = 0 \end{cases}$

5.16 Dado el sistema lineal (S) $\begin{cases} 2x - \lambda\, y + \mu\, z = 4 \\ x + z - 2 = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, determinar los siguientes conjuntos:

In $= \{ (\lambda, \mu) \in \Re^2 :$ (S) es inconsistente$\}$
Cd $= \{ (\lambda, \mu) \in \Re^2 :$ (S) es consistente determinado$\}$
Ci $= \{ (\lambda, \mu) \in \Re^2 :$ (S) es consistente indeterminado$\}$

5.17 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(S_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (S_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5.18 Dados los polinomios $p_1(x) = -x^2 + 3x + 1$, $p_2(x) = x^3$, $p_3(x) = x + 2$, $p_4(x) = x^3 - x^2$ y $p_5(x) = x + 1$, determinar el conjunto
$$S = \left((a_1, a_2, a_3, a_4) : a_j \in C,\ j = 1,2,3,4,\ p_5(x) = a_1.p_1(x) + a_2.p_2(x) + a_3.p_3(x) + a_4.p_4(x) \right)$$

5.19 Para las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 1 & 2\\ -4 & 4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Determinar el conjunto $S=\left\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in C^4 : \alpha A+\beta B+\gamma D+\delta E=C^t\right\}$

5.20 Dado el sistema lineal (S) $\begin{cases}u+w=2\\ u+v+w-2=0\\ 2u+\alpha v+\beta w=4\\ 2u+(\alpha-1)v+\beta w-4=0\end{cases}$, analizar su consistencia e inconsistencia en función de los parámetros α y β.

5.21 Hallar, para el sistema de ecuaciones lineales (S) $\begin{cases}x-2y-z=1\\ -4x+5y+\alpha z=-2\\ 2x+\alpha y-z=4\end{cases}$, los siguientes conjuntos:

Cd ={ $\alpha \in C$: (S) es compatible determinado}
Ci ={ $\alpha \in C$: (S) es compatible indeterminado}
In ={ $\alpha \in C$: (S) es incompatible}

Además: **a.** Si Cd $\cap$N $\neq \varnothing$ elegir el menor de sus elementos y resolver el sistema que así resulta.
b. Si Ci $\cap$N $\neq \varnothing$ elegir el mayor de sus elementos y resolver el sistema que así se obtiene.

5.22 Sea el sistema de ecuaciones lineales (S_h) $\begin{cases}3x+y-z=0\\ 3x+2y+\alpha z=0\\ x-y-4z=0\\ x+3y+7z=0\end{cases}$; entonces:

a. Hallar los valores de α para que (S_h) admita:
   i. Sólo la solución trivial
   ii. Autosoluciones o soluciones no triviales.
b. Reemplazar cada uno de los valores hallados en el apartado a.ii. y determinar, para el sistema correspondiente así obtenido, el conjunto solución del mismo.

5.23 Resolver los sistemas lineales $A.X = T_j$ (j=1,2,3) siendo

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -5 & -1\\ 3 & 1 & -5 & -1\\ 3 & -4 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\\ x\end{pmatrix},\quad T_1=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\\ -1\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

5.24 Utilizar la regla de Cramer, cuando ello sea posible, para resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

a. $\begin{cases}x+5y-2z=1\\ 2x+z-y=2\\ x-2y-4z=-4\end{cases}$

b. $\begin{cases}ax-by=a-2b\\ bx+ay=a+b\end{cases}$ donde $a=\cos\theta$ y $b=\sin\theta$

c. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=8\\ 4x_1+3x_2+x_3=7\\ 6x_1+2x_2+2x_3=15\end{cases}$

d. Los del ejercicio 6.23.