Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ÁLGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
Licenciatura en Ciencias de la Computación - Año 2012

Equipo docente: Dr. Francisco Vittone, Lic. Vanesa Vansteenkiste, Luciana Talarn.

UNIDAD 7: Elementos de geometría analítica del plano

1. Lugar geométrico

Definición 1. *Se denomina **lugar geométrico** (en el plano) al conjunto de los puntos del plano que cumplen con determinadas propiedades geométricas.*

Por ejemplo, el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo P, es un lugar geométrico denominado *circunferencia* (que estudiaremos más adelante). O el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento $\overline{AB}$ es un lugar geométrico (es una recta), denominado *mediatriz* del segmento $\overline{AB}$.

De esta manera, muchos de los objetos geométricos con los que trabajamos habitualmente pueden definirse como lugares geométricos. El objetivo de la geometría analítica es, una vez fijado un sistema de coordenadas en el plano (cf. la unidad de vectores), determinar qué ecuación (o ecuaciones) deben verificar las coordenadas de un punto del plano para pertenecer a un determinado lugar geométrico.

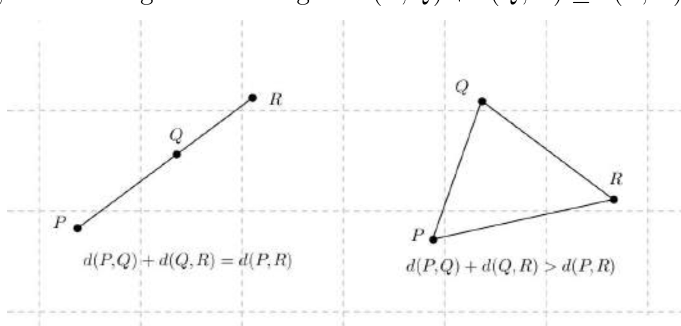
Definición 2. *Decimos que una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$ es la **ecuación cartesiana** de un lugar geométrico $\mathcal{C}$ si es satisfecha únicamente por las coordenadas de todos los puntos que pertenecen a $\mathcal{C}$.*

Muchos de los lugares geométricos con los que trabajaremos involucran la noción de distancia.

Definición 3. *Se denomina **distancia** entre dos puntos P y Q, y se denota $d(P, Q)$, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$.*

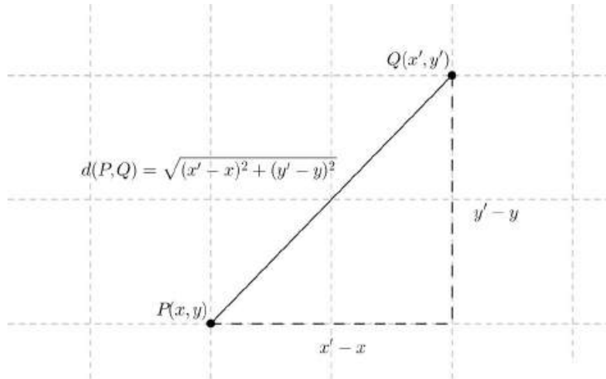
Tres consecuencias son inmediatas de la definición de distancia:

1. $d(P, Q) \geq 0$ (pues es la longitud de un segmento), y $d(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$.
3. Dados tres puntos P, Q y R, vale la *desigualdad triangular* $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$



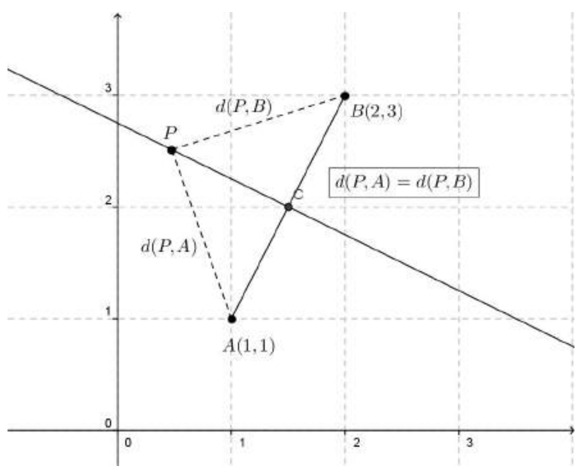
Ahora si P tiene coordenadas (x, y) y Q tiene coordenadas (x', y'), $d(P, Q)$ es la longitud del segmento $\overline{PQ}$, o de manera equivalente, el módulo del vector $\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y)$. Tenemos entonces que

(1) $$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$$



Ejemplo 4. *Encontraremos el lugar geométrico r de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(1,1)$ y $B(2,3)$. Dado un punto P de coordenadas (x,y), tenemos:*

$$\begin{aligned} P\in r &\Leftrightarrow d(P,A)=d(P,B) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2-6y+9 \\ &\Leftrightarrow 2x+4y-11=0 \end{aligned}$$



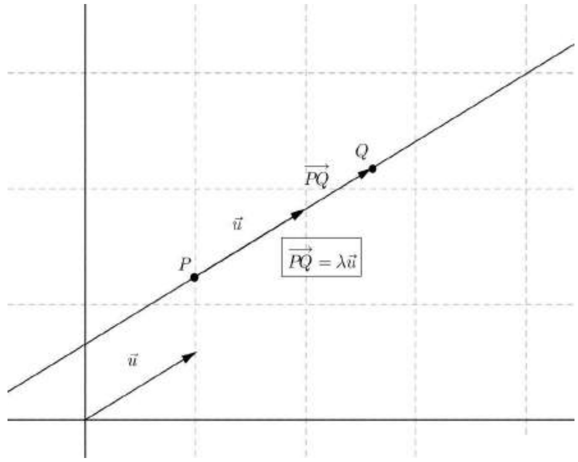
Luego $r=\{P(x,y):\ 2x+4y-11=0\}$, que como veremos en seguida es la recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ por el punto medio C de $\overline{AB}$.

2. Ecuaciones vectorial y paramétrica de la recta en el plano

Comenzaremos determinando la ecuación de la recta r que pasa por un punto P dado y tiene la dirección de un vector $\vec{u}$.

Definición 5. *Dado un punto P y un vector no nulo $\vec{u}$ la* ***recta*** *r* ***que pasa por*** *P* ***en la dirección de*** *$\vec{u}$ es el lugar geométrico de los puntos Q tales que $Q=P$ o $\overrightarrow{PQ}//\vec{u}$. Esto es,*

(2) $$Q\in r \Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\ :\ \overrightarrow{PQ}=\lambda\vec{u}$$



Observemos que el vector $\overrightarrow{PQ}$ se descompone como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. Luego la recta r está compuesta por todos los puntos Q que verifican

(3) $$\boxed{\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

La ecuación (3) se denomina **ecuación vectorial** de la recta r.

De esta ecuación derivaremos las denominadas **ecuaciones paramétricas** de r. Comencemos analizando un ejemplo.

Ejemplo 6. *Queremos encontrar la recta r que pasa por el punto $P(1,1)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (2,1)$.*

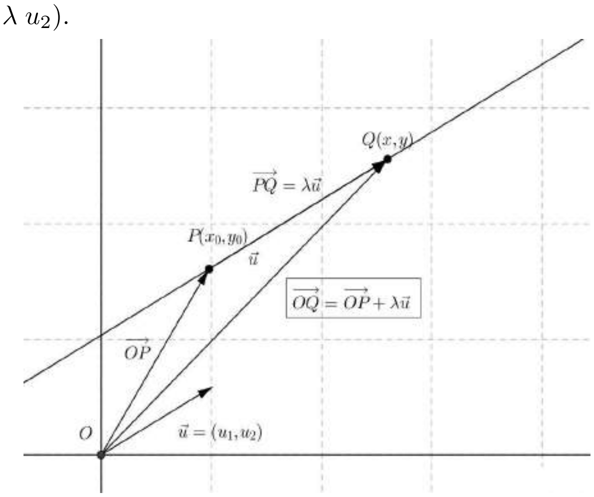
Tenemos que el punto $Q(x,y)$ pertenece a la recta si y sólo si $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}$. Ahora $\overrightarrow{OQ} = (x,y)$, $\overrightarrow{OP} = (1,1)$ y $\vec{u} = (2,1)$, con lo cual $\lambda\vec{u} = (2\lambda, \lambda)$. Luego resulta que un punto Q de coordenadas (x,y) pertenece a la recta si y sólo si sus coordenadas verifican:

$$\begin{cases} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 1 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Haciendo variar λ en todo $\mathbb{R}$ obtenemos las coordenadas de todos los puntos que están en r. Así $Q_1(3,2) \in r$ ($\lambda = 1$), $Q_2(5,3) \in r$ ($\lambda = 2$), $Q_3(1+2\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \in r$ ($\lambda = \sqrt{2}$), $Q_4(-1,0) \in r$ ($\lambda = -1$).

Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejemplo, a partir de la ecuación vectorial podemos encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $P(x_0, y_0)$ en la dirección de $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Por (3), un punto $Q(x,y) \in r$ si y sólo si $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero $\overrightarrow{OQ} = (x,y)$, $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0)$, $\lambda\vec{u} = (\lambda\, u_1, \lambda\, u_2)$, con lo cual $\overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u} = (x_0 + \lambda\, u_1, y_0 + \lambda\, u_2)$.



Luego las **ecuaciones paramétricas** de r son:

(4) $$\boxed{\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\, u_1 \\ y &= y_0 + \lambda\, u_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Se denominan ecuaciones paramétricas pues están dadas por el parámetro λ.

Observemos que recíprocamente, toda ecuación de la forma (4) con $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$ representa una recta en el plano que pasa por $P(x_0, y_0)$ en la dirección de $\vec{u}$.

Ejemplo 7. *Sean $P(-1,5)$, $\vec{u} = (3,-2)$. Entonces las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por P en la dirección de $\vec{u}$ son*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1+3\lambda \\ y & = & 5-2\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Así obtenemos que $P \in r$, tomando $\lambda = 0$ y $Q_1(2,3)$ y $Q_2(\frac{1}{2}, 4)$ son puntos de r, tomando $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ respectivamente.

Queremos ahora determinar si los puntos $R(-7,9)$ y $Q(2,1)$ pertenecen o no a r.

Comencemos con R. $R \in r$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -7 & = & -1+3\lambda \\ 9 & = & 5-2\lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -6 & = & 3\lambda \\ 4 & = & -2\lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -2 & = & \lambda \\ -2 & = & \lambda \end{array} \right.$$

Concluimos entonces que $R \in r$.

Observemosque el punto $Q = (2,1) \notin r$. En efecto, si perteneciese, debería existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2 & = & -1+3\lambda \\ 1 & = & 5-2\lambda \end{array} \right.$$

De la primer ecuación surge que debería ser $\lambda = 1$, pero de la segunda surge $\lambda = 2$. Luego $Q \notin r$.

De la ecuación (2) se obtiene una condición más simple. De hecho, $Q \in r$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\vec{u}$. Pero $\overrightarrow{PQ} = (2-(-1), 1-5) = (3,-4)$ y $\vec{u} = (3,-2)$ y $\frac{-4}{3} \neq \frac{-2}{3}$, o sea que $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{u}$ no son paralelos, y por lo tanto $Q \notin r$.

Observemos ahora que como $Q_1 \in \mathbb{R}$, la recta que pasa por Q_1 en la dirección de $\vec{u}$ es la misma recta r. Si queremos encontrar las ecuaciones paramétricas tomando como punto de paso Q_1 en vez de P, obtenemos

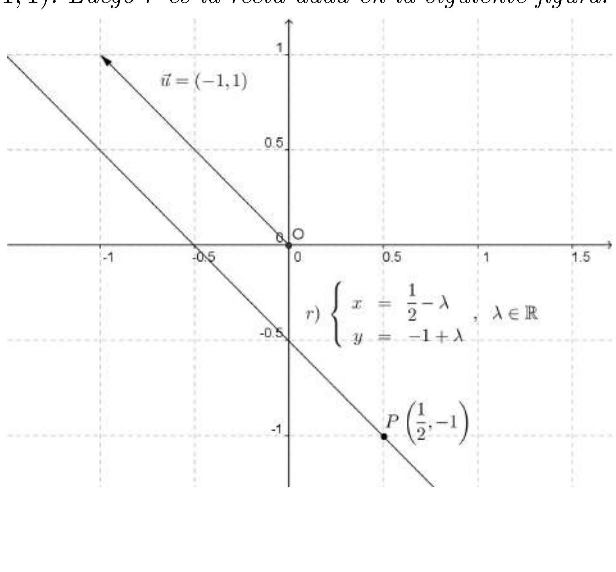
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2+3\beta \\ y & = & 3-2\beta \end{array} \right. , \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) son distintas pero representan exactamente la misma recta r. Por ejemplo, para ver que $P \in r$, en (5) debemos tomar $\lambda = 0$ y en (6) debemos tomar $\beta = -1$. Par ver que $Q_1 \in r$, en (5) debemos tomar $\lambda = 1$ mientras que en (6) debemos tomar $\beta = 0$.

Ejemplo 8. *Supongamos que queremos graficar la recta r de ecuaciones paramétricas*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}-\lambda \\ y & = & -1+\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Comenzamos determinando un punto de paso. Tomando $\lambda = 0$, tenemos que $P(\frac{1}{2}, -1) \in r$. De (7) deducimos que la dirección de r está dada por el vector $\vec{u} = (-1,1)$. Luego r es la recta dada en la siguiente figura:

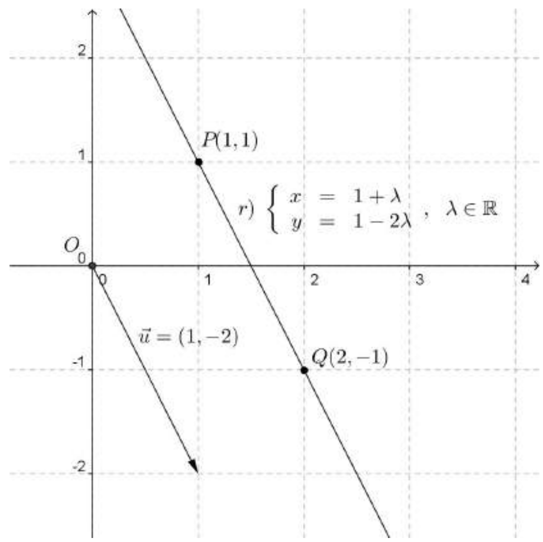


Ejemplo 9. *Sabemos que dos puntos del plano determinan una única recta. Supongamos que queremos determinar las ecuaciones de la recta que pasa por $P(1,1)$ y $Q(2,-1)$. En este caso, el vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1,-2)$ determina la dirección de la recta y P es un punto de paso (observar que podríamos haber tomado $\overrightarrow{QP}$ como dirección o Q como punto de paso y obtendríamos la misma recta).*

Luego las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+\lambda \\ y & = & 1-2\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

y la recta es la dada en la siguiente figura



Ejemplo 10. *Sea r la recta de ecuaciones paramétricas*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1+\frac{1}{2}\lambda \\ y & = & 1-\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

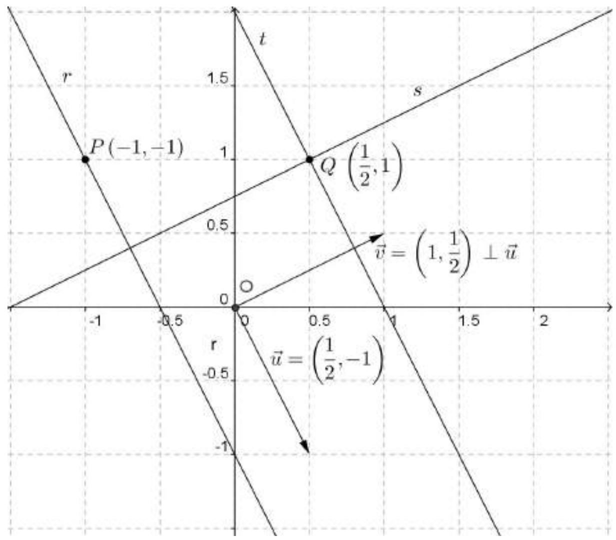
Sea $Q(\frac{1}{2},1)$. Entonces $Q \notin r$ (verificar) y existe una única recta t paralela a r por Q y una única recta s perpendicular a r por Q. Encontraremos las ecuaciones de ambas rectas.

Observemos que Q es un punto sobre ambas. Como t es paralela a r, su dirección es la misma que la de r, o sea, está dada por el vector $\vec{u}$. Luego las ecuaciones de t son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y & = & 1-\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar las ecuaciones de s necesitamos hallar un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ perpendicular a $\vec{u} = (\frac{1}{2},-1)$, o sea, tal que $\frac{1}{2} \cdot v_1 + (-)1 \cdot v_2 = 0$. Basta tomar $\vec{v} = (1,\frac{1}{2})$. Luego las ecuaciones de s son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}+\lambda \\ y & = & 1+\frac{1}{2}\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



3. Ecuación general de la recta en el plano

Hasta el momento hemos determinado las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano, esto es, ecuaciones que dependen de un parámetro lambda. Nuestro objetivo es encontrar una ecuación cartesiana de la recta, esto es, una ecuación que involucre sólo las variables x e y y sea satisfecha únicamente por las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta.

Supongamos que r es una recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o sea r pasa por $P(x_0, y_0)$ y tiene la dirección de $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, debe ser $u_1 \neq 0$ o $u_2 \neq 0$.

Supongamos que $u_1 \neq 0$ (el desarrollo si $u_2 \neq 0$ es análogo). Si $Q(x, y) \in r$, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que x, y, λ verifican las ecuaciones de r. Podemos despejar λ de la primer ecuación y reemplazarlo en la segunda. Esto es

$$\lambda = \frac{x - x_0}{u_1}$$

y por lo tanto

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{u_1} u_2 \Leftrightarrow y - \frac{u_2}{u_1} x + \frac{u_2}{u_1} x_0 - y_0 = 0$$

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por $-u_1$ tenemos

$$u_2 x - u_1 y - u_2 x_0 + u_1 y_0 = 0 \tag{8}$$

Aquí x_0, y_0, u_1 y u_2 son datos. Luego un punto Q pertenece a la recta si y sólo si sus coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación (8). Tomando $a = u_2$, $b = -u_1$, $c = u_1 y_0 - u_2 x_0$ resulta que la **ecuación general** o **cartesiana** de r es

$$ax + by + c = 0.$$

Veremos a continuación que una ecuación de este tipo es siempre la ecuación cartesiana de una recta.

Teorema 11. *Un lugar geométrico en el plano es una recta si y sólo si su ecuación cartesiana es de la forma*

$$ax + by + c = 0 \tag{9}$$

con a, b, $c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq \vec{0}$.

Demostración. Ya vimos que si r es una recta que pasa por $P(x_0, y_0)$ en la dirección de $\vec{u} = (u_0, u_1)$, entonces la ecuación cartesiana de r es de la forma (9), tomando $a = u_2$, $b = -u_1$, $c = u_1 y_0 - u_2 x_0$.

Veamos ahora que dados a, b, $c \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos, las coordenadas (x, y) de un punto Q del plano satisfacen la ecuación (9) si y sólo si están sobre una recta.

Para ello, debemos determinar un punto de paso y su dirección. Basándonos en lo hecho hasta ahora, definamos $\vec{u} = (b, -a)$. Como $(a, b) \neq \vec{0}$, se debe verificar que $a \neq 0$ o que $b \neq 0$. Supongamos que $b \neq 0$ (el desarrollo para $a \neq 0$ es análogo y se deja como ejercicio).

Observemos que $x = 0$, $y = -\frac{c}{b}$ satisfacen (9). Consideremos entonces el punto $P(0, -\frac{c}{b})$. Entonces un punto $Q(x, y)$ pertenece a la recta r que pasa por P en la dirección de $\vec{u}$ si y sólo si existe λ tal que

$$\begin{cases} x &= \lambda\, b \\ y &= -\frac{c}{b} - \lambda\, a \end{cases},$$

si y sólo si $\lambda = \frac{x}{b}$ e

$$y = -\frac{c}{b} - \frac{x}{b} a \;\Leftrightarrow\; ax + by + c = 0$$

Esto es $Q(x, y) \in r$ si y sólo si (x, y) satisfacen (9). Luego (9) es la ecuación cartesiana de la recta r. $\square$

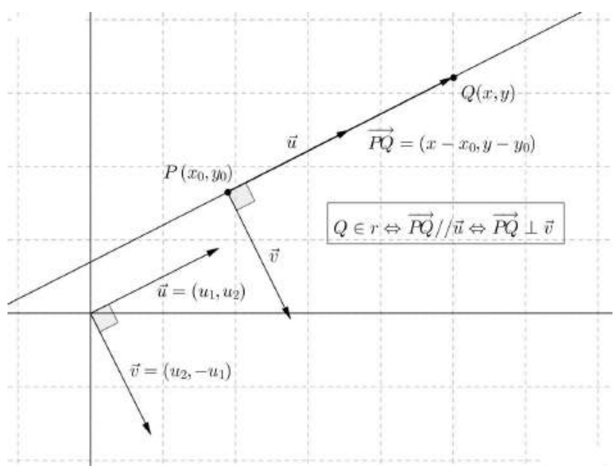
Observación 12. *Hemos visto que si r es una recta de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\, u_1 \\ y &= y_0 + \lambda\, u_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

su ecuación general es $u_2 x - u_1 y - u_2 x_0 + u_1 y_0 = 0$, que puede reescribirse como

$$u_2(x - x_0) + (-u_1)(y - y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; (u_2, -u_1) \times (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Esta última expresión no es más que afirmar que el vector $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$ es perpendicular a $\vec{v} = (u_2, -u_1)$. Esto es inmediato del hecho de que $Q \in r$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\vec{u} = (u_1, u_2)$, que es equivalente a que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a $\vec{v} = (u_2, -u_1) \perp \vec{u}$.



Observación 13. *Sea r una recta de ecuación general $ax + by + x = 0$. Entonce el vector $\vec{v} = (a, b)$ es un vector perpendicular a r y $\vec{u} = (b, -a)$ o $\vec{u'} = (-b, a)$ son direcciones de r.*

Observación 14. *Si $\alpha \neq 0$ y ponemos $a' = \alpha a$, $b' = \alpha b$, $c' = \alpha c$, entonces $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son ecuaciones cartesianas de la misma recta r.*

Ejemplo 15. *Hallaremos la ecuación general de la recta r de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x &= -1 + 3\lambda \\ y &= 5 - 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lo haremos de las dos formas que hemos visto. Primero observemos que r es la recta que pasa por $P(-1, 5)$ en la dirección de $\vec{u} = (3, -2)$. Como $u_1 = 3 \neq 0$, podemos despejar λ de la primer ecuación y reemplazarlo en la segunda. Obtenemos así

$$\lambda = \frac{x+1}{3}, \quad y = 5 - 2\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow 3y - 15 = -2x - 2$$

de donde obtenemos que la ecuación general de r es

$$2x + 3y - 13 = 0. \tag{10}$$

Por otra parte como $\vec{u}=(3,-2)$ es la dirección de r y $P(-1,5)$ es un punto de paso, entonces $\vec{v}=(2,3)$ es un vector normal a r y por lo tanto $Q(x,y)\in r$ si y sólo si

$$(x+1,y-5)\times(2,3)=0 \Leftrightarrow 2(x+1)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-13=0$$

de donde obtenemos la misma ecuación general de r.

Para ver si un punto pertenece o no a r basta verificar si sus coordenadas verifican o no la ecuación (10). Así $Q_1(2,3)\in r$ pues $2\cdot 2+3\cdot 3-13=0$, $Q_2(-4,7)\in r$ pues $2\cdot(-4)+3\cdot 7-13=0$ y $Q_3=(1,1)\notin r$ pues $2\cdot 1+3\cdot 1-13=-8\neq 0$.

Ejemplo 16. *Encontraremos ahora las ecuaciones paramétricas de la recta r de ecuación cartesiana $x-y+5=0$. Necesitamos obtener primero un punto de paso. Reemplazamos x por el valor que queramos y vemos que valor debe tomar y. Así, tomando $x=0$, $y=5$, con lo cual la recta r pasa por el punto $P(0,5)$. Como $\vec{v}=(1,-1)$ es un vector normal a r, su dirección viene dada por $\vec{u}=(1,1)$. Luego las ecuaciones paramétricas de r son*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & +\lambda \\ y & = & 5+\lambda \end{array}\right., \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ejemplo 17. *Encontraremos la ecuación general de la recta r que pasa por los puntos $P(1,2)$ y $Q(2,5)$. La dirección de la recta está dada por el vector $\vec{u}=\overrightarrow{OP}=(1,3)$ y por lo tanto un vector normal a la recta es $\vec{v}=(3,-1)$. Luego $R(x,y)\in r$ si y sólo si*

$$\overrightarrow{OR}\times\vec{v}=0 \Leftrightarrow (x-1,y-2)\times(3,-1)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)-(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x-y-1=0$$

Observación 18. *Sea $ax+by+c=0$ la ecuación general de una recta r en el plano. Si alguno de los coeficientes a, b o c se anulan, la recta tiene características particulares:*

- *si $c=0$, el punto $O(0,0)$ verifica la ecuación de r,o sea que r es una recta que pasa por el origen.*
- *si $a=0$, $b\neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $y=-\frac{c}{b}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(x,-\frac{c}{b})$, y por lo tanto r es una curva horizontal, paralela al eje x, que corta al eje y en el punto de ordenada $-\frac{c}{b}$.*
- *si $b=0$, $a\neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $x=-\frac{c}{a}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(-\frac{c}{a},y)$, y por lo tanto r es una curva vertical, paralela al eje y, que corta al eje x en el punto de abscisa $-\frac{c}{a}$.*

Terminaremos esta sección dando otras formas que puede tomar la ecuación general de una recta en el plano.

Definición 19. *Se denomina* ***ecuación normal*** *(o normalizada) de una recta r a una ecuación cartesiana de r de la forma $ax+by+c=0$ con $|(a,b)|=\sqrt{a^2+b^2}=1$.*

Es decir, una recta r de ecuación $ax+by+c$ está dada en forma normal si el vector normal $\vec{n}=(a,b)$ es un versor, esto es, si tiene módulo 1.

Para pasar de la expresión general $a'x+b'y+c'=0$ a la ecuación normal, basta tomar

$$a=\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},\ b=\frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},\ c=\frac{c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Ejemplo 20. *Si r es la recta de ecuación general $x+y-2\sqrt{2}=0$, entonces $(a',b')=(1,1)$ y $\sqrt{a'^2+b'^2}=\sqrt{2}$. Luego la ecuación normal de r es*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-2=0$$

.

Ejemplo 21. *La ecuación $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-5=0$ ya es la ecuación normal de la recta que representa, pues $\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$.*

Observación 22. *Veremos más adelante que si $ax+by+c=0$ es la ecuación normal de una recta r, entonces $|c|$ es la distancia de r al origen de coordenadas.*

Si en la ecuación $ax + by + c$ de una recta r $a, b, c \neq 0$, podemos dividir por $-c$ y obtenemos

$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

Observemos que los puntos $Q_1(-\frac{c}{a}, 0)$ y $Q_2(0, -\frac{c}{b})$ corresponden a las intersecciones de la recta r con el eje x y con el eje y respectivamente.

Definición 23. *Una ecuación de una recta r de la forma*

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{h} = 1$$

se denomina ***ecuación segmentaria*** *de la recta.*

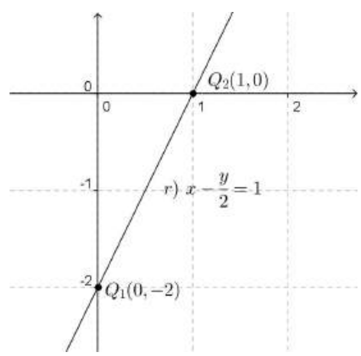
Observación 24. *A diferencia de los otros tipos de ecuaciones de la recta r, si r no pasa por el origen ni es paralela a alguno de los ejes, la ecuación segmentaria de r es única.*

En ese caso r corta al eje x en el punto de abscisa $x = k$ y corta al eje y en el punto de abscisa $y = h$.

Ejemplo 25. *Consideremos la recta r de ecuación general $2x - y - 2 = 0$. Entonces la ecuación segmentaria de r es*

$$x - \frac{y}{2} = 1$$

con lo cual r corta al eje x en $Q_1(1, 0)$ y al eje y en $Q_2(0, -2)$. Como toda recta está determinada por dos puntos, esta información nos permite graficar r con facilidad:



Finalmente analizaremos la forma posiblemente más conocida de la ecuación de la recta, la denominada **ecuación explícita**.

Supongamos que r es una recta de ecuación $ax + by + c = 0$ con $b \neq 0$. Entonces podemos despejar y en función de x y obtenemos

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

Poniendo $m = -\frac{a}{b}$ y $h = -\frac{c}{b}$, la ecuación de r puede escribirse como

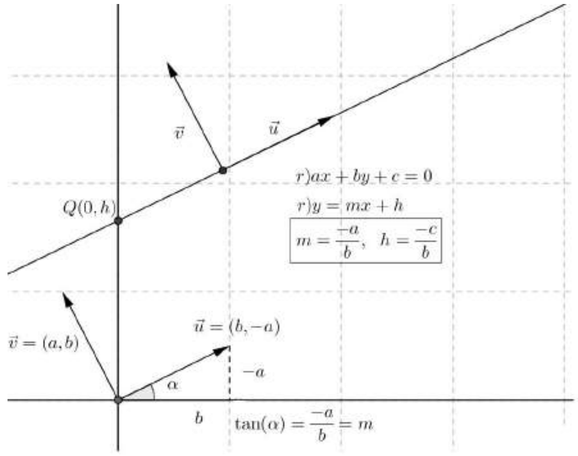
$$\boxed{y = mx + h}$$

m se denomina **pendiente** de la recta y h se denomina **ordenada al origen**.

La pendiente es la tangente del ángulo que forma r con el eje positivo de las x. De hecho $\vec{v} = (a, b)$ es un vector normal a r y entonces $\vec{u} = (b, -a)$ es la dirección de r. El ángulo α que forman r con el semieje positivo de las x es el ángulo que forman $\vec{u}$ con el versor $\vec{i}$. Luego se tiene

$$tg(\alpha) = \frac{-a}{b} = m$$

h se denomina ordenada al origen pues la recta r corta al eje y en el punto de ordenada h, o sea $Q(0, h) \in r$.

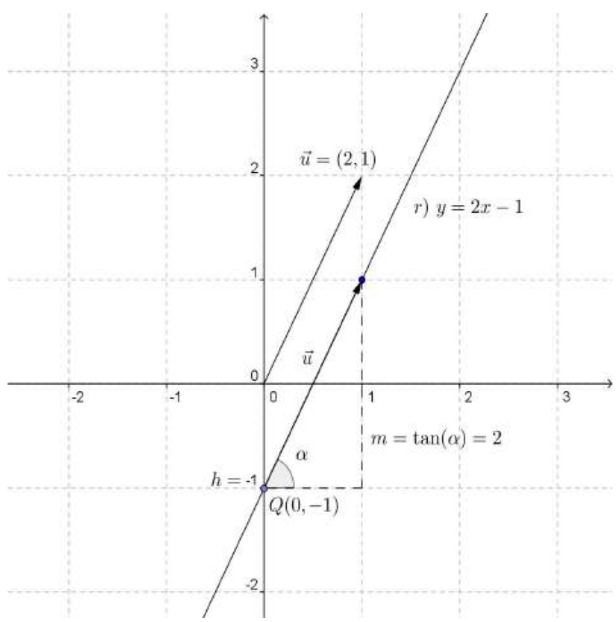


Observación 26. *Observemos que si $y = mx+h$ es la ecuación explícita de la recta r, la ecuación general es $-mx+y-h = 0$, con lo cual $\vec{v} = (-m, 1)$ es un vector normal a r y $\vec{u} = (1, m)$ es la dirección de r. Como h es la ordenada al origen, $Q(0, h) \in r$ y por lo tanto las ecuaciones paramétricas de r son*

$$\begin{cases} x = t \\ y = h + mt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 27. *Sea r la recta de pendiente $m = 2$ y ordenada al origen -1. Entonces la ecuación explicita y las ecuaciones paramétricas de de r son*

$$y = 2x - 1, \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \end{cases}.$$

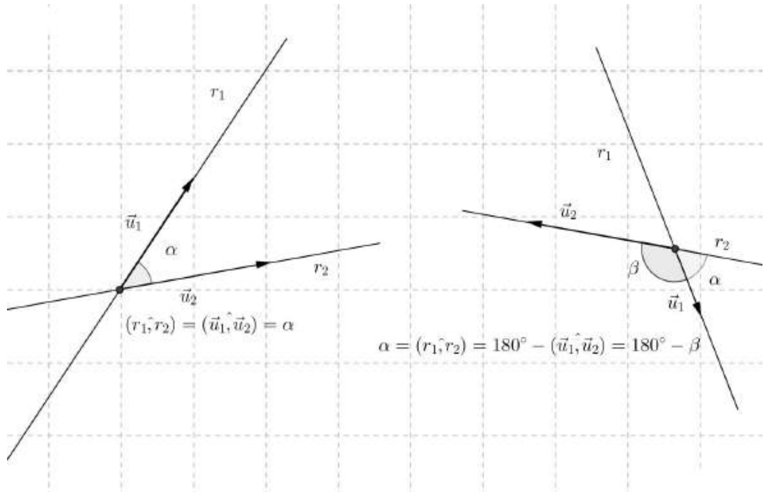


4. Problemas con rectas

4.1 Ángulo entre dos rectas

Definición 28. *Dadas dos rectas r_1 y r_2 se denomina **ángulo** entre r_1 y r_2, y se denota $(r_1 \hat{,} r_2)$, al ángulo agudo que ellas forman si las rectas se cortan en un punto. Si r_1 y r_2 son paralelas o coincidentes, $(r_1 \hat{,} r_2) = 0$.*

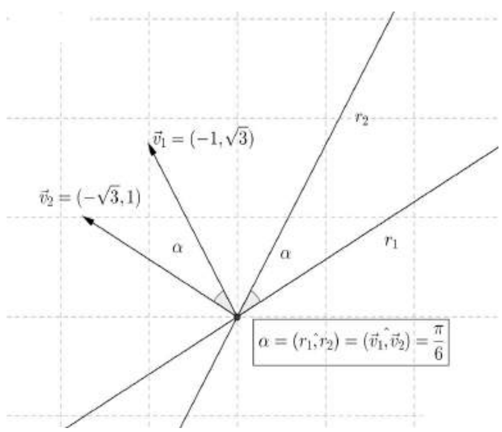
Observación 29. *Si r_1 y r_2 son rectas de direcciones $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$ entonces $(r_1\hat{,}r_2) = (\vec{u}_1\hat{,}\vec{u}_2)$ o bien $(r_1\hat{,}r_2) = \pi - (\vec{u}_1\hat{,}\vec{u}_2)$. Una relación análoga vale con respecto al ángulo que forman los vectores normales a r_1 y r_2.*



Ejemplo 30. *Sean $r_1)\ -x - \sqrt{3}y + 2(1+\sqrt{3}) = 0$ y $r_2) - \sqrt{3} + y - 2(1+\sqrt{3}) = 0$. Entonces los vectores normales a r_1 y r_2 son $\vec{v_1} = (-1, \sqrt{3})$ y $\vec{v_2} = (-\sqrt{3}, 1)$ respectivamente. Tenemos*

$$\cos(\vec{v}_1\hat{,}\vec{v}_2) = \frac{\vec{v_1} \times \vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{v}_1\hat{,}\vec{v}_2) = \frac{\pi}{6}.$$

Luego $(r_1\hat{,}r_2) = \frac{\pi}{6}$.



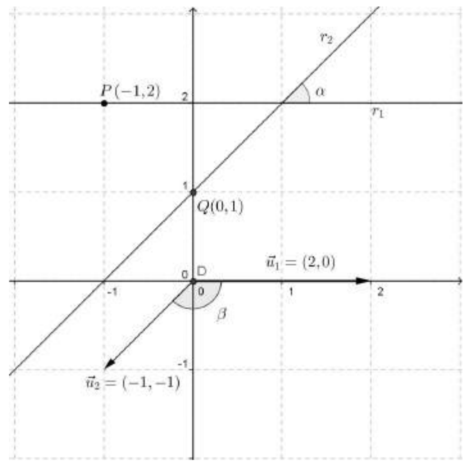
Ejemplo 31. *Sean r_1 y r_2 las rectas de ecuaciones paramétricas*

$$r_1)\ \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad r_2)\ \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces r_1 es la recta que pasa por $P\ (-1, 2)$ en la dirección de $\vec{u}_1 = (2, 0)$ y r_2 es la recta que pasa por $Q\ (0, 1)$ en la dirección de $\vec{u}_2 = (-1, -1)$. Además

$$\cos(\vec{u}_1\hat{,}\vec{u}_2) = \frac{\vec{u_1} \times \vec{u_2}}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(\vec{u}_1\hat{,}\vec{u}_2) = \frac{3}{4}\pi$$

Luego $(\vec{u}_1\hat{,}\vec{u}_2)$ no es un ángulo agudo, y entonces $(r_1\hat{,}r_2) = \pi - (\vec{u}_1\hat{,}\vec{u}_2) = \frac{\pi}{4}$.



4.2 Posición relativa entre dos rectas

Sean r_1 y r_2 dos rectas en el plano. Entonces existen dos opciones: r_1 es paralela a r_2 o no lo es. En el caso que tengamos $r_1 \;//\; r_2$ distinguiremos aún dos opciones, que r_1 y r_2 sean coincidentes, o que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

En caso de que r_1 y r_2 no sean paralelas, se intersecarán en un único punto.

Analizaremos dos casos, dependiendo si las ecuaciones de las rectas son paramétricas o cartesianas.

<u>Caso I:</u> r_1 y r_2 dadas en ecuaciones paramétricas.

Supongamos que las ecuaciones de r_1 y r_2 son respectivamente

$$r_1)\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}; \quad r_2)\left\{\begin{array}{l} x = x_0' + su_1' \\ y = y_0' + su_2' \end{array}\right., \; s \in \mathbb{R}.$$

Entonces $r_1 \;//\; r_2$ si y sólo si $\vec{u} = (u_1, u_2) \;//\; \vec{u'} = (u_1', u_2')$. En este caso, las rectas son coincidentes si el punto de paso $P\ (x_0, y_0)$ de r_1 verifica además la ecuación de r_2, o equivalentemente, si el vector $\overrightarrow{PP'}$ determinado por los puntos de paso de cada recta es a su vez paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{u'}$.

En caso que no sean paralelas, encontrar el punto de intersección de ambas rectas puede ser más complicado. Lo analizarenis en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 32. *Sean r_1, r_2 y r_3 las rectas de ecuaciones*

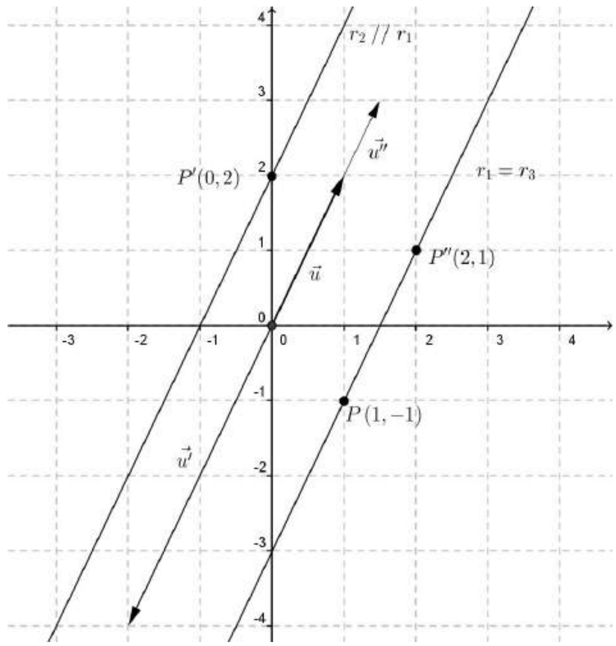
$$r_1)\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}; \quad r_2)\left\{\begin{array}{l} x = -2s \\ y = 2 - 4s \end{array}\right., \; s \in \mathbb{R}; \quad r_3)\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \frac{3}{2}\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{array}\right., \; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces las direcciones de r_1, r_2 y r_3 son $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{u'} = (-2,-4)$ y $\vec{u''} = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ respectivamente. Como $\vec{u'} = -2\vec{u}$ y $\vec{u''} = \frac{3}{2}\vec{u}$, resulta $\vec{u} \;//\; \vec{u'} \;//\; \vec{u''}$, y por lo tanto

$$r_1 \;//\; r_2 \;//\; r_3.$$

Para determinar si son o no coincidentes, observemos que los puntos de paso de r_1, r_2 y r_3 son $P\ (1,-1)$, $P'\ (0,2)$ y $P''(2,1)$ respectivamente. Luego $\overrightarrow{PP'} = (-1,3)$ que no es paralelo a $\vec{u}$ (pues $\frac{-1}{1} \neq \frac{3}{2}$) con lo cual $P' \notin r_1$, y por lo tanto r_1 y r_2 no son coincidentes.

Por otra parte $\overrightarrow{PP''} = (1,2) = \vec{u}$, luego $P'' \in r_1$ y por lo tanto $r_1 = r_2$.



Ejemplo 33. *Sean r_1, r_2 y r_3 las rectas de ecuaciones*

$$r_1) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}; \quad r_2) \begin{cases} x = 2s \\ y = 4 - s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}.$$

La direcciones de r_1 y r_2 son $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{u'} = (2,-1)$ respectivamente. $\vec{u}$ y $\vec{u'}$ no son paralelos pues $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$. Luego r_1 y r_2 se cortan en un único punto $P\ (x_0, y_0)$. Las coordenadas (x_0, y_0) de P deben satisfacer las ecuaciones de ambas rectas. Luego deben existir $t,\ s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x_0 = 1 + t = 2s \\ y_0 = -2 + t = 4 - 2 \end{cases}.$$

Luego los parámetros t y s deben verificar el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 1 + t = 2s \\ -2 + t = 4 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Observemos que tomando el valor $t = 1$ en la ecuación de r_1 o el valor $s = 1$ en la ecuación de r_2, obtenemos el punto $P\ (2,3)$ de intersección de ambas rectas.

<u>Caso II:</u> r_1 y r_2 dadas en ecuaciones cartesianas.

Nuestro objetivo es caracterizar las posiciones relativas de r_1 y r_2 a partir de los coeficientes que aparecen en las ecuaciones generales de ambas rectas. Tenemos:

Teorema 34. *Supongamos que r_1 y r_2 tienen ecuaciones*

$$r_1)\ ax + by + c = 0, \quad r_2)\ a'x + b'y + c' = 0. \tag{11}$$

Entonces $r_1 // r_2$ si y sólo si $ab' - b'a = 0$. Más aún, si $r_1 // r_2$, entonces $r_1 = r_2$ si y sólo si $c = c' = 0$ o $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ si $c \neq 0$, $a \neq 0$ o $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$ si $c \neq 0$, $a = 0$.

En consecuencia, r_1 y r_2 se cortan en un único punto $P\ (x,y)$ si y sólo $ab' - b'a \neq 0$.

Demostración. Si las ecuaciones de r_1 y r_2 son las dadas en (11), los vectores normales a r_1 y r_2 son $\vec{v} = (a,b)$ y $\vec{v'} = (a',b')$ respectivamente. Luego

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{v} // \vec{v'}.$$

Ahora, si $a = 0$ (o $b = 0$), entonces $\vec{v} // \vec{v'}$ si y sólo si $a' = 0$ (resp. $b' = 0$) si y sólo si $ab' - a'b = 0$ (esta última equivalencia surge del hecho que a y b no pueden ser simultáneamente nulos).

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\vec{v} \,//\, \vec{v'} \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \Leftrightarrow ab' - a'b = 0.$$

Supongamos ahora que $r_1 = r_2$.

Si $c = 0$, $P(0,0) \in r_1$ pues $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c = 0$ y por lo tanto $P(0,0) \in r_2 = r_1$. Luego $0 = a' \cdot 0 + b' \cdot 0 + c' = c'$.

Si $c \neq 0$, $r_1 \neq r_2$, supongamos $a \neq 0$. Entonces $P(-\frac{c}{a}, 0) \in r_1$ y por lo tanto $P \in r_2$. Luego

$$-\frac{c}{a}a' + c' = 0 \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Si $b \neq 0$ es análogo.

La recíproca es similar y se deja como ejercicio.

Finalmente, concluimos que $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$. □

Corolario 35. *Sea $r_1)\ y = mx + h$, $r_2)\ y = m'x + h'$. Entonces:*

1. *$r_1 \,//\, r_2$ si y sólo si $m = m'$.*
2. *$r_1 = r_2$ si y sólo si $m = m'$, $h = h'$.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 36. *El número $ab' - a'b$ se denomina determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ y se denota*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Ejemplo 37. *Sean $r_1)\ x + y + 1 = 0$, $r_2)\ 2x + 2y + 5 = 0$, $r_3)\ \frac{1}{2}x - y - 2 = 0$ y $r_4)\ -x - y = 1$.*

Entonces los vectores normales a r_1, r_2, r_3 y r_4 son $\vec{v} = (1,1)$, $\vec{v'} = (2,2)$, $\vec{v''} = (\frac{1}{2}, -1)$ y $\vec{v'''} = (-1,-1)$.

Es inmediato que $\vec{v}$, $\vec{v'}$ y $\vec{v'''}$ son paralelos, y por lo tanto r_1, r_2 y r_4 son paralelas. Si calculamos los respectivos determinantes tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Si comparamos r_1 y r_2, tenemos $c = 1$, $c' = 5$, luego $\frac{c'}{c} = 5 \neq 2 = \frac{a'}{a}$, luego r_1 y r_2 son rectas paralelas no coincidentes.

Si comparamos r_1 y r_4, tenemos $\frac{c'''}{c} = -1 = \frac{a'''}{a}$. Luego $r_1 = r_2$.

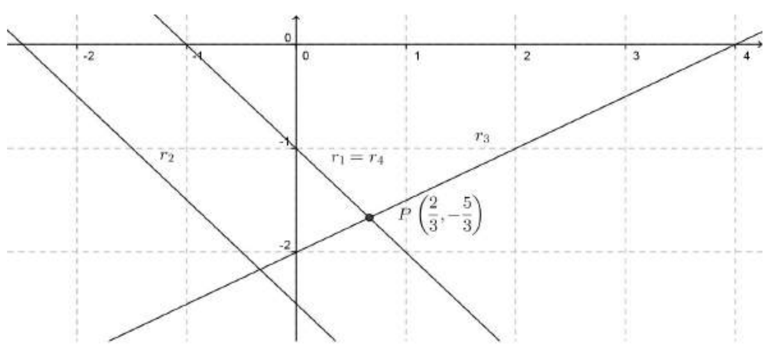
Comparemos ahora r_1 y r_3. Calculamos el determinante correspondiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2} \neq 0$$

Luego r_1 y r_3 no son paralelas. Para encontrar el punto $P(x,y)$ de intersección entre r_1 y r_3, debemos observarque las coordenadas (x,y) de P deben satisfacer tanto la ecuación de r_1 como la de r_3, y por lo tanto deben ser solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \frac{1}{2}x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3},\ y = -\frac{5}{3}$$

Luego $r_1 \cap r_2 = \{P\ \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)\}$.



Observación 38. *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$S)\ \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$$

con $(a, b) \neq \vec{0}$*,* $(a', b') \neq \vec{0}$*.*

Cada una de las ecuaciones del sistema es la ecuación de una recta. Luego tenemos tres opciones:

1. *Las dos rectas no son paralelas, en cuyo caso se cortan en un único punto y el sistema tiene solución única, dada por las coordenadas del punto de intersección. En este caso el sistema se dice* ***compatible determinado****. En función del Teorema 34 se tiene:*

$$\text{El sistema } S \text{ es compatible determinado si y sólo si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0.$$

2. *Las dos rectas son paralelas y no coincidentes. En este caso, las rectas no se cortan en ningún punto, y por lo tanto el sistema* S *no tiene solución. Decimos que* $S)$ *es* ***incompatible****.*
3. *Las dos rectas son coincidentes, en cuyo caso las coordenadas de todos los puntos de cualquiera de las rectas es solución del sistema. En este caso decimos que* S *es* ***compatible indeterminado****. En función del Teorema 34 tenemos:*

$$\text{El sistema } S \text{ es compatible indeterminado o incompatible si y sólo si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0.$$

4.3 Distancia de un punto a una recta

Definición 39. *Dado un punto* P *del plano y una recta* r*, si trazamos una perpendicular a* r *que pase por* P*, ésta corta a* r *en un único punto* P'*. Se denomina* ***distancia*** *de* P *a* r*, y se denota* $d(P, r)$ *a la distancia* $d(P, P')$ *entre* P *y* P'*.*

Observación 40. *Si* $P \in r$ *es inmediato de la definición que* $d(P, r) = d(P, P) = 0$*.*

Teorema 41. *Sea* r *una recta de ecuación general* $ax + by + c = 0$ *y sea* $P\ (x_0, y_0)$ *un punto del plano. Entonces*

$$\boxed{d(P, r) = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Demostración. Sea $\vec{v} = (a, b)$ un vector normal a r. Si Q es un punto cualquiera de r, entonces

$$d(P, r) = \left| proy_{\ \vec{v}}\ \overrightarrow{QP} \right|$$

Supongamos que Q tiene coordenadas (x', y'). Entonces, como $Q \in r$ debe verificarse

$$ax' + by' + c = 0 \Rightarrow c = -ax' - by' \tag{12}$$

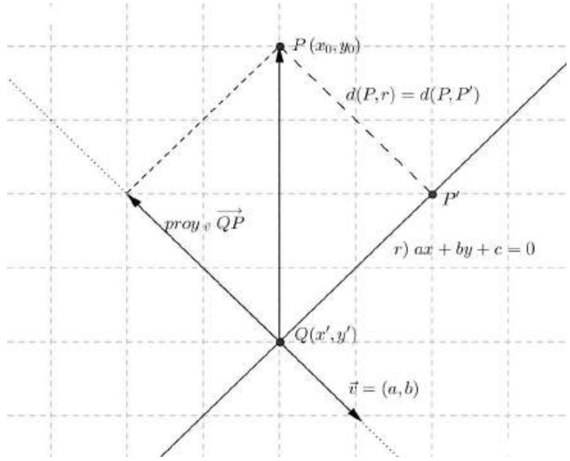
Por otra parte, $\overrightarrow{QP} = (x_0 - x', y_0 - y')$ y $\vec{v}_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ es el versor asociado a $\vec{v}$. Luego

$$|proy_{\ \vec{v}}\ \overrightarrow{QP}| = |(\overrightarrow{QP} \times \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0| = \left| \frac{a(x_0 - x') + b(y_0 - y')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Ahora $a(x_0 - x') + b(y_0 - y') = ax_0 + by_0 - ax' - by' = ax_0 + by_0 + c$, donde la útilma igualdad surge de (12). Luego

$$d(P, r) = \left| proy_{\ \vec{v}}\ \overrightarrow{QP} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

□



Corolario 42. *Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación normal de una recta r. Entonces*

$$|c| = d(O, r)$$

donde O es el origen de coordenadas.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 43. *Sea r la recta por $Q(1,1)$ en la dirección de $\vec{u} = (-1,2)$, y sean $P_1\ (-2,3)$, $P_2\ (-1,5)$. Queremos determinar $d(P_1, r)$ y $d(P_2, r)$. Un vector normal a r es $\vec{v} = (2,1)$, con lo cual las ecuaciones cartesianas de r vienen dadas por*

$$(x-1, y-1) \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Entonces

$$d(P_1, r) = \frac{|\ 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

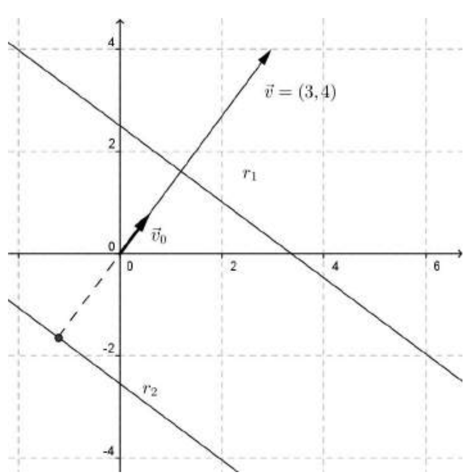
Observemos que $P_2 \in r$ pues $2 \cdot (-1) + 5 - 1 = 0$, luego $d(P_2, r) = 0$.

Ejemplo 44. *Queremos hallar las ecuaciones de las rectas normales al vector $\vec{v} = (3,4)$ que están a distancia 2 del origen de coordenadas. Observemosque $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Entonces el versor asociado a $\vec{v}$ es $\vec{v_0} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Luego las rectas normales a $\vec{v}$ tienen ecuaciones normales de la forma*

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + c = 0.$$

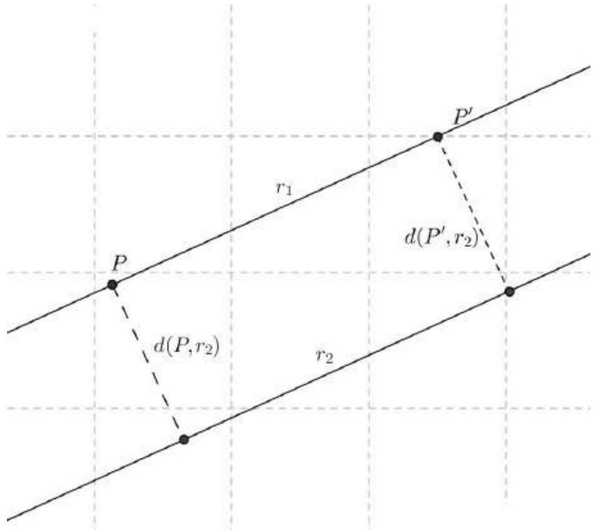
Como queremos hallar las rectas a distancia 2 del origen, se debe verificar $|c| = d(O, r) = 2$, luego $c = \pm 2$. Concluimos que las dos rectas normales a v a distancia 2 del origen son las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones

$$r_1)\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 = 0, \quad r_2)\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$



Sean r_1 y r_2 dos rectas paralelas. Entonces cualesquiera sean $P,\ P' \in r_1$ se verifica

$$d(P, r_2) = d(P', r_2).$$



Podemos entonces hacer la siguiente definición:

Definición 45. *Se denomina distancia entre las rectas paralelas r_1 y r_2 y se denota $d(r_1, r_2)$ a $d(P, r_2)$ siendo P un punto cualquiera de r_1.*

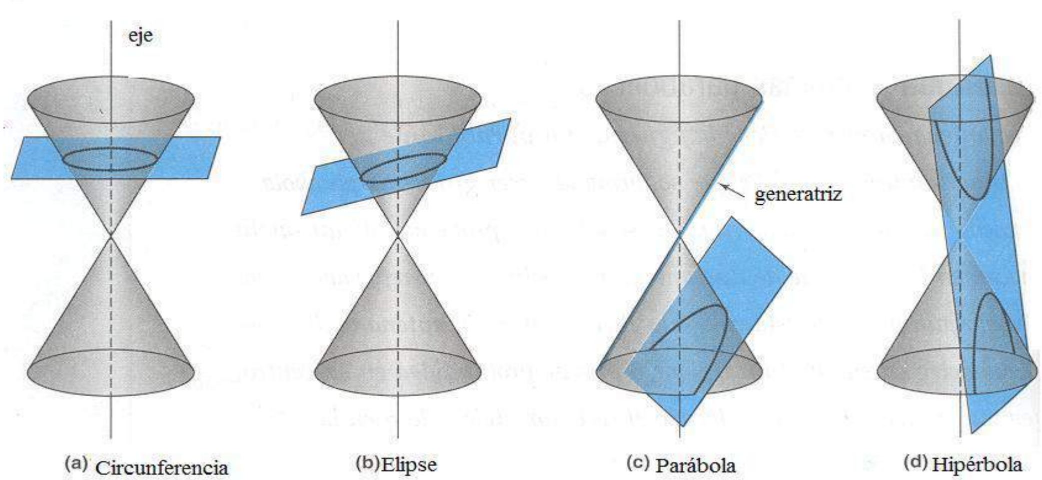
Ejemplo 46. *Consideremos las rectas $r_1)$ $2x + y - 1 = 0$ y $r_2)$ $x + \frac{1}{2}y + 2 = 0$. Entonces r_1 y r_2 son rectas paralelas no coincidentes (verificarlo). Para calcular $d(r_1, r_2)$ tomamos un punto P cualquiera de r_1, por ejemplo el punto $P(0, 1)$. Entonces*

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_2) = \frac{\left|0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2\right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

5. Secciones Cónicas

Un doble cono recto es una figura que se engendra al hacer girar una recta g alrededor de una recta h que la corta. La recta h se denomina *eje* del cono y las distintas posiciones de la recta g *generatrices* del cono. El punto de intersección del eje con cualquiera de las generatrices se denomina *vértice* del cono.

Una *sección cónica* es toda sección que se obtiene de intersecar un doble cono recto con un plano que lo corta. Según las distintas posiciones del plano de corte las secciones cónicas (o simplemente *cónicas*) reciben nombres diferentes, que damos a continuación:



(a) Si el plano es perpendicular al eje del cono y no pasa por el vértice, la cónica se denomina una *circunferencia*. En el caso especial de que el plano pase por el vértice se obtiene un punto.
(b) Si el plano no es perpendicular al eje del cono y forma con él un ángulo superior al ángulo que forman el eje del cono y cualquier generatriz, la cónica resultante se denomina una *elipse*, salvo en el caso especial que el plano pase por el vértice dónde se obtiene un punto.
(c) Si el plano es paralelo a cualquiera de las generatrices del cono, la cónica resultante se denomina *parábola*, excepto si el plano pasa por el vértice, en cuyo caso se obtiene una recta.
(d) Si el ángulo que forman el plano y el eje es inferior al ángulo que forman el eje y una generatriz cualquiera, la cónica que se denomina *hipérbola*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtienen dos rectas que se cortan.

Los casos especiales que aparecen en los casos que enumeramos anteriormente (un punto, una recta o un par de rectas concurrentes) se denominan *cónicas degeneradas*, y no las estudiaremos aquí (ya lo hicimos en toda la unidad!).

Nos dedicaremos a caracterizar las cónicas como lugares geométricos en término de distancia, encontraremos sus elementos distinguidos y sus ecuaciones cartesianas en un sistema dado.

5.1 Circunferencia

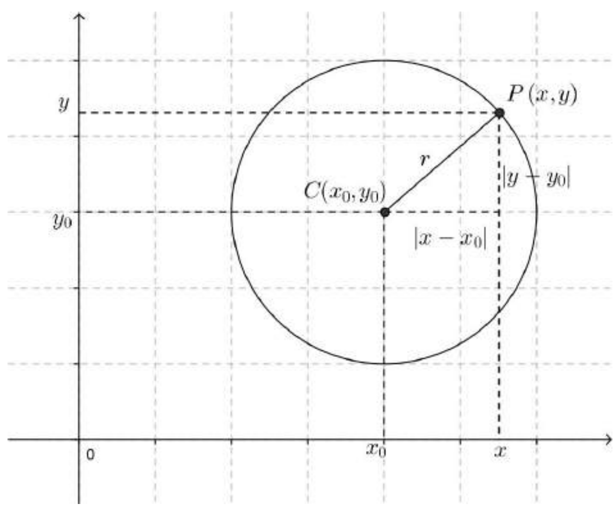
Definición 47. *Se denomina* ***circunferencia*** *al conjunto de los puntos del plano que equidistan (a una distancia $r > 0$ denominada* ***radio****) de un punto fijo del plano, denominado* ***centro*** *de la circunferencia.*

Sea $C(x_0, y_0)$ un punto del plano y sea $r > 0$ un número real positivo. Sea $\mathcal{C}(C, r)$ la circunferencia de centro C y radio r. Entonces resulta:

$$Q(x, y) \in \mathcal{C}(C, r) \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Obtenemos así que la ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r es

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{13}$$



Ejemplo 48. *La circunferencia $\mathcal{C}(O, 1)$ centrada en el origen $O(0, 0)$ y de radio 1, se denomina circunferencia unitaria, y su ecuación es*

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo 49. *La circunferencia de centro $C(1, 2)$ y radio 3 tiene ecuación*

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Ejemplo 50. *Consideremos el lugar geométrico*

$$\mathcal{C} = \{Q(x,y):\ x^2+2x+y^2+4y+5=4\}.$$

Si completamos cuadrados en la ecuación $x^2+2x+y^2-4y+5=4$ *obtenemos:*

$$\left.\begin{array}{l} x^2+2x=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1 \\ y^2-4y=(y^2-4y+4)-4=(y-2)^2-4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x+y^2-4y+5=(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+5=(x+1)^2+(y-2)^2$$

Luego $x^2+2x+y^2-4y+5=4 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$ *y por lo tanto* $\mathcal{C}$ *es la circunferencia con centro en* $C(-1,2)$ *y radio* 2.

5.2 Elipse

Definición 51. *Dados dos puntos distintos* F_1 *y* F_2 *del plano y un número real positivo* a *tal que* $2a > d(F_1,F_2)$, *se denomina* ***elipse*** *de* ***focos*** F_1 *y* F_2 *al lugar geométrico de los puntos* P *del plano tales que*

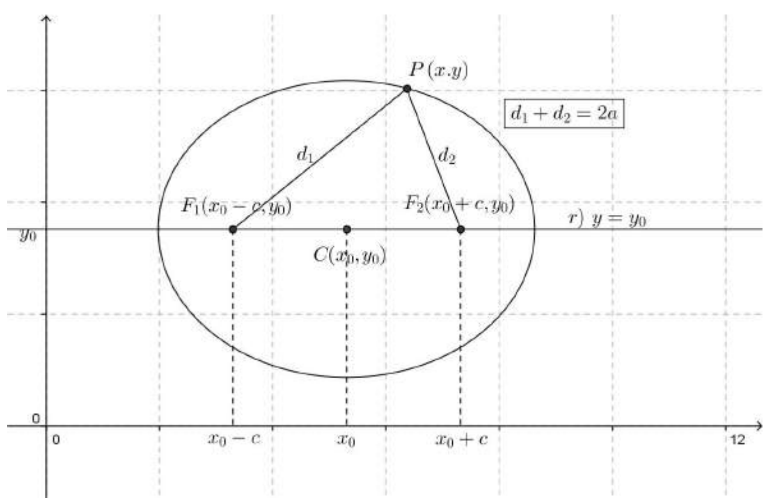
$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a.$$

El punto medio del segmento que determinan los focos se denomina ***centro*** *de la elipse.*
La recta determinada por los focos de la elipse se denomina ***eje focal****.*

Denotaremos por $\mathcal{E}(F_1,F_2,a)$ la elipse de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$. Nos limitaremos a encontrar las ecuaciones cartesianas de una elipse que tenga su eje focal paralelo al eje x o al eje y.

Comencemos analizando el primer caso. Supongamos que F_1 y F_2 se encuentran sobre la recta de ecuación $y=y_0$ paralela al eje x. Sea $C(x_0,y_0)$ el centro de la elipse, esto es, el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$. Luego, si $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)>0$, resulta

$$F_1(x_0-c,y_0),\quad F_2(x_0+c,y_0).$$



Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} P(x,y)\in\mathcal{E}(F_1,F_2,a) &\Leftrightarrow d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}=2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{((x-x_0)-c)^2+(y-y_0)^2}=2a-\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2} \\ &\Leftrightarrow ((x-x_0)-c)^2+(y-y_0)^2=\left(2a-\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow ((x-x_0)-c)^2+(y-y_0)^2=4a^2-4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2}+((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2 \end{aligned}$$

Desarrollando $((x-x_0)-c)^2$ y $((x-x_0)+c)^2$(tomando siempre $(x-x_0)$ como un único número) y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
P(x,y)\in\mathcal{E}(F_1,F_2,a) \quad &\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2}=4a^2+4c|x-x_0| \\
&\Leftrightarrow \quad a\sqrt{((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2}=a^2+c|x-x_0| \\
&\Leftrightarrow \quad a^2\left[((x-x_0)+c)^2+(y-y_0)^2\right]=\left[a^2+c|x-x_0|\right]^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2(x-x_0)^2+2a^2c|x-x_0|+a^2c^2+a^2(y-y_0)^2=a^4+2a^2c|x-x_0|+c^2(x-x_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2=a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

Definamos $b=\sqrt{a^2-c^2}$, (observemos que $a^2-c^2>0$, justificar por qué), tenemos

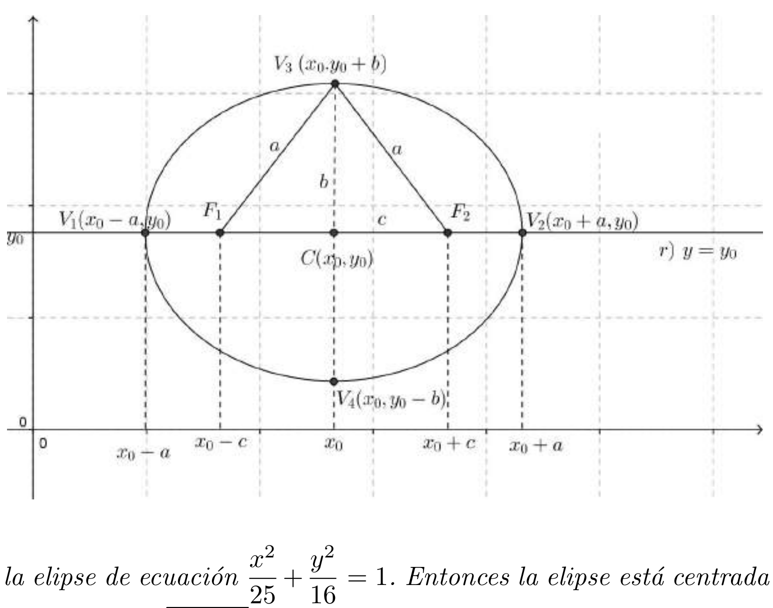
$$P(x,y)\in\mathcal{E}(F_1,F_2,a)\Leftrightarrow b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2=a^2b^2$$

dividiendo ambos miembros por a^2b^2 obtenemos finalmente

$$\boxed{P(x,y)\in\mathcal{E}(F_1,F_2,a)\Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

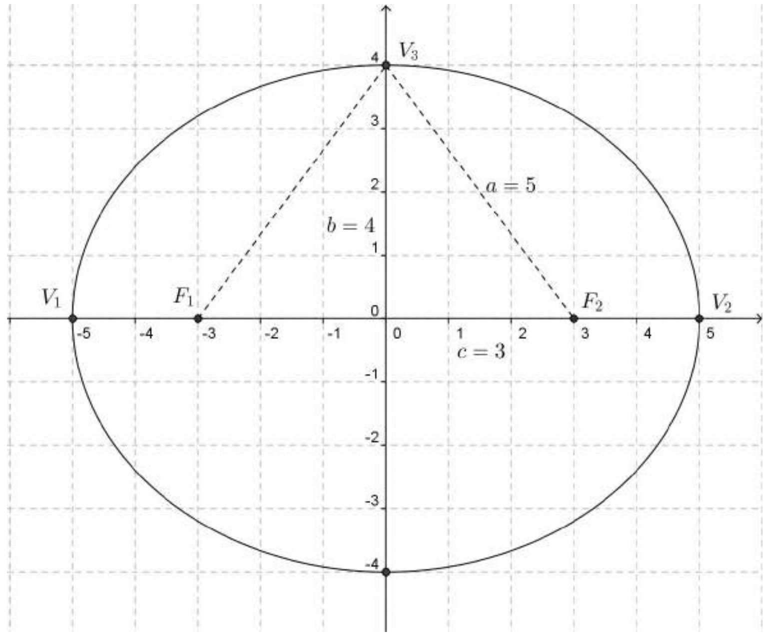
Analicemos los significados geométricos de $a,\ b$ y c.

- c es la distancia del centro de la elipse a cada uno de los focos. Esto es, $2c=d(F_1,F_2)$.
- a es tal que cada punto de la elipse verifica $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ y recíprocamente. Esto implica que si $C(x_0,y_0)$ es el centro de la elipse, los puntos $V_1(x_0-a,y_0)$ y $V_2(x_0+a,y_0)$ son puntos de la elipse, que se denominan **vértices** de la elipse.
- $b^2=a^2-c^2$, lo que implica que los puntos $V_3(x_0,y_0+b)$ y $V_4(x_0,y_0-b)$ son puntos de la elipse también denominados **vértices**.
- Observemos que siempre se verifica $a>b$ y $a>c$.



Ejemplo 52. *Consideremos la elipse de ecuación* $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. *Entonces la elipse está centrada en el origen* $O(0,0)$, $a^2=25$ *y* $b^2=16$, *con lo cual* $a=5$, $b=4$ *y* $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

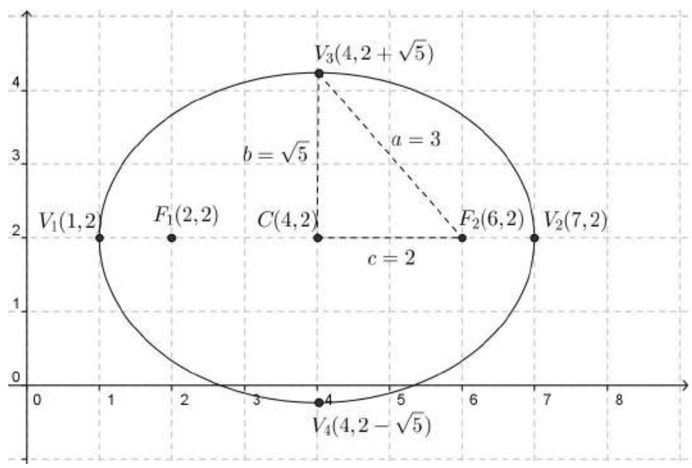
Luego los focos de la elipse son $F_1(-3,0)$ *y* $F_2(0,3)$ *y los vértices son* $V_1(-5,0)$, $V_2(5,0)$, $V_3(0,4)$ *y* $V_4(0,-4)$. *Con esta información estamos en condiciones de realizar la gráfica de la elipse:*



Ejemplo 53. *Queremos encontrar la elipse de focos $F_1(2,2)$, $F_2(6,2)$ y $a = 3$. El punto medio de $\overline{F_1F_2}$ es $C(4,2)$. Luego $c = d(C,F_1) = d(C,F_2) = 2$ y en consecuencia $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$. Luego la ecuación de la elipse es*

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

y los vértices son $V_1(1,2)$, $V_2(7,2)$, $V_3(4, 2+\sqrt{5})$ y $V_4(4, 2-\sqrt{5})$.



Observación 54. *Si la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ tiene sus focos sobre una recta paralela al eje y y centro en el punto $C(x_0, y_0)$, entonces de manera análoga a lo hecho anteriormente, concluimos que la ecuación de la elipse es*

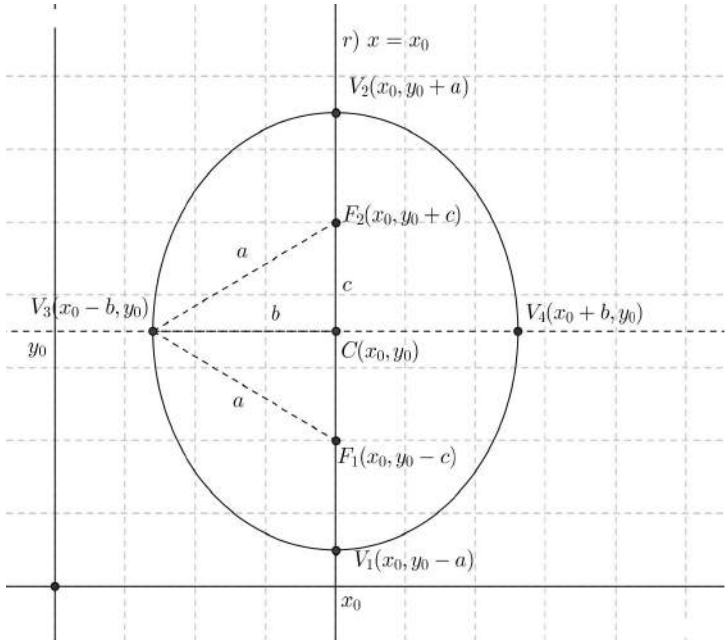
$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2}$$

donde si $c = d(C, F_1)$,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} < a.$$

Tenemos además:

- *Los focos son $F_1(x_0, y_0 - c)$ y $F_2(x_0, y_0 + c)$.*
- *Los vértices son $V_1(x_0, y_0 - a)$, $V_2(x_0, y_0 + a)$, $V_3(x_0 - b, y_0)$ y $V_4(x_0 + b, y_0)$.*



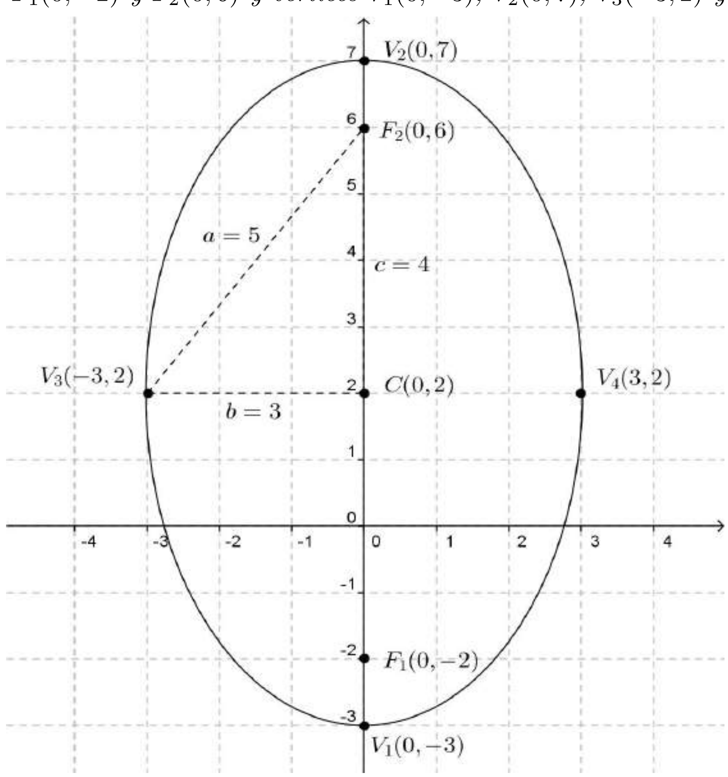
Ejemplo 55. *Consideremos el lugar geométrico*

$$\mathcal{E} = \{Q(x, y) : 25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0\}$$

Comenzamos completando cuadrados en el término $9y^2 - 36y$*. Tenemos:* $9y^2 - 36y = 9(y^2 - 4y) = 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 9((y-2)^2 - 4) = 9(y-2)^2 - 36$*. Luego*

$$\begin{aligned} 25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 25x^2 + 9(y-2)^2 - 36 - 189 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 9(y-2)^2 = 225 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1 \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathcal{E}$ *es una elipse de centro* $C(0, 2)$*, con distancia focal* $a = 5$ *y* $b = 3$*, con lo cual* $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$*. Luego* $\mathcal{E}$ *es una elipse vertical con focos* $F_1(0, -2)$ *y* $F_2(0, 6)$ *y vértices* $V_1(0, -3)$*,* $V_2(0, 7)$*,* $V_3(-3, 2)$ *y* $V_4(2, 3)$*.*



5.3 Hipérbola

Definición 56. *Dados dos puntos distintos del plano F_1 y F_2 y un número real positivo a tal que $2a < d(F_1, F2)$, se denomina **hipérbola** de focos F_1 y F_2 al lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

*El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se denomina **centro** de la hipérbola y la recta que contiene a los focos se denomina **eje focal**.*

Hallaremos las ecuaciones de las hipérbolas con eje focal paralelo al eje x o al eje y.

Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la hipérbola y $c = d(C, F_1) = d(C, F_2)$, resulta en este caso $c > a$. Si denotamos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, realizando los mismos pasos que para obtener la ecuación de la elipse, obtenemos que la ecuación de una hipérbola $\mathcal{H}$ de focos F_1, F_2 y distancia a es:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \tag{14}$$

si el eje focal es la recta $r)\ y = y_0$ (o sea es horizontal), y

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1} \tag{15}$$

si el eje focal es vertical, o sea, es la recta $r)\ x = x_0$.

Interpretación geométrica de a, b y c:

Sea $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ la hipérbola de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$. Supondremos que el eje focal es la recta $r)\ y = y_0$ paralela al eje x (si el eje focal es paralelo al eje y el desarrollo que haremos a continuación es análogo).

Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la hipérbola, entonces

$$\boxed{c = d(C, F_1) = d(C, F_2)},$$

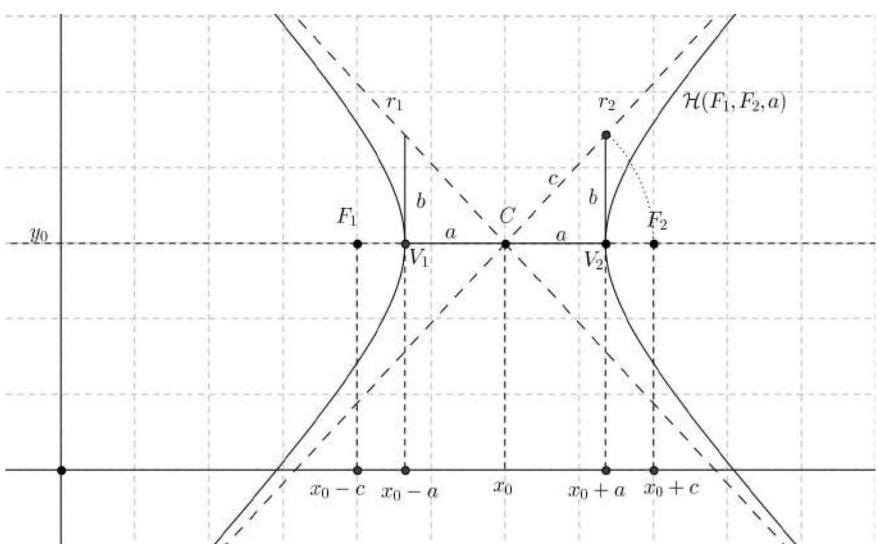
con lo cual los focos son $F_1(x_0 - c, y_0)$ y $F_2(x_0 + c, y_0)$.

Sean V_1 y V_2 los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal más cercanos a F_1 y F_2 respectivamente. V_1 y V_2 se denominan **vértices** de la hipérbola. Como V_1 es un punto de $\mathcal{H}$, se debe verificar $d(V_1, F_2) - d(V_1, F_1) = 2a$.

Pero $d(V_1, F_2) = d(V_1, C) + d(C, F_2) = d(V_1, C) + c$ y $d(V_1, F_1) = d(C, F_1) - d(C, V_1) = d(V_1, c) + c$. Luego

$$2a = d(V_1, F_2) - d(V_1, F_1) = d(V_1, C) + c - (d(V_1, c) + c) = 2d(V_1, C) \Rightarrow \boxed{d(V_1, C) = a}$$

De manera análoga se concluye que $d(V_2, C) = a$ con lo cual los vértices son $V_1(x_0 - a, y_0)$ y $V_2(x_0 + a, y_0)$.



Pongamos ahora

$$\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Tracemos por V_1 y por V_2 segmentos perpendiculares al eje focal de longitud b. Si trazamos las rectas r_1 y r_2 que pasan por C y por los extremos de estos segmentos, obtenemos que tienen pendientes $-\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{a}$ respectivamente y por lo tanto sus ecuaciones son

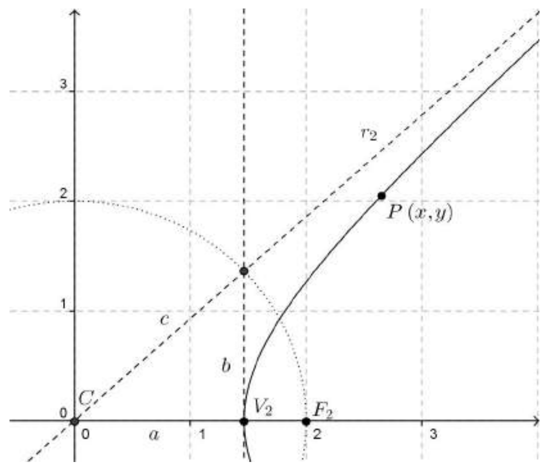
$$\boxed{r_1)\ y = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0, \quad r_2)\ y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0}$$

Entonces estas rectas son las **asíntotas** de la hipérbola. O sea que a medida que los puntos de la hipérbola se alejan del centro en cualquiera de las cuatro direcciones, éstos se acercan tanto como queramos a estas rectas, sin nunca tocarlas.

Probaremos este hecho para el caso particular que la hipérbola esté centrada en el origen, a los efectos de simplificar los cálculos (puede intentarse la prueba general!).

Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola con $x > 0$, $y > 0$ como se muestra en la figura. Entonces

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$



Observemos que la ecuación general de r_2 cuando C es el origen es $-bx + ay = 0$. Entonces

$$d(P, r_2) = \frac{|-bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|-bx + ab\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|-bx + b\sqrt{x^2 - a^2}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left|\sqrt{x^2 - a^2} - x\right|.$$

Ahora bien, P se aleja de C a medida que su abscisa x crece. Como tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left|\sqrt{x^2 - a^2} - x\right| = 0$$

resulta que la distancia $d(P, r_2)$ tiende a 0 cuando P se aleja de C, como queríamos ver.

Observación 57. *En el caso de que la hipérbola tenga eje focal paralelo al eje y, el análisis es análogo, pero las asíntotas tienen pendientes $-\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b}$. Analizaremos esto más adelante con un ejemplo.*

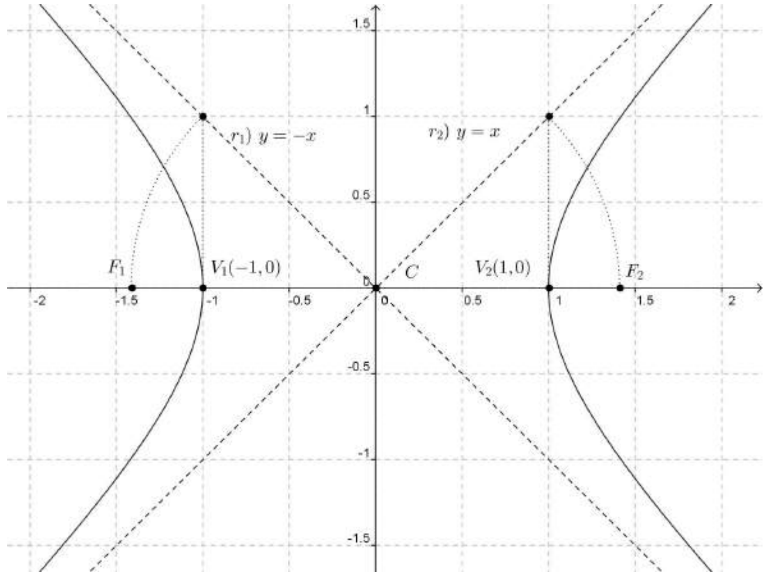
Ejemplo 58. *Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de focos $F_1(\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ y $a = 1$.*

El centro de $\mathcal{H}$ es $C(0,0)$, el punto medio de $\overline{F_1F_2}$, y por lo tanto $c = d(C, F_1) = \sqrt{2}$. Luego $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 1$ y como el eje focal de $\mathcal{H}$ es el eje x, la ecuación de $\mathcal{H}$ es

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Los vértices son $V_1(-1, 0)$ y $V_2(1, 0)$ y las asíntotas son las rectas

$$r_1)\ y = -x, \quad r_2)\ y = x.$$



Ejemplo 59. *Consideremos el lugar geométrico*

$$\mathcal{H} = \{Q(x,y) : 16x^2 + 32x - 9y^2 + 18y - 137 = 0\}.$$

Completando cuadrados tenemos

$$16x^2 + 32x = 16(x^2 + 2x + 1 - 1) = 16(x+1)^2 - 16; \quad -9y^2 + 18y = -9(y^2 - 2y + 1 - 1) = -9(y-1)^2 + 9.$$

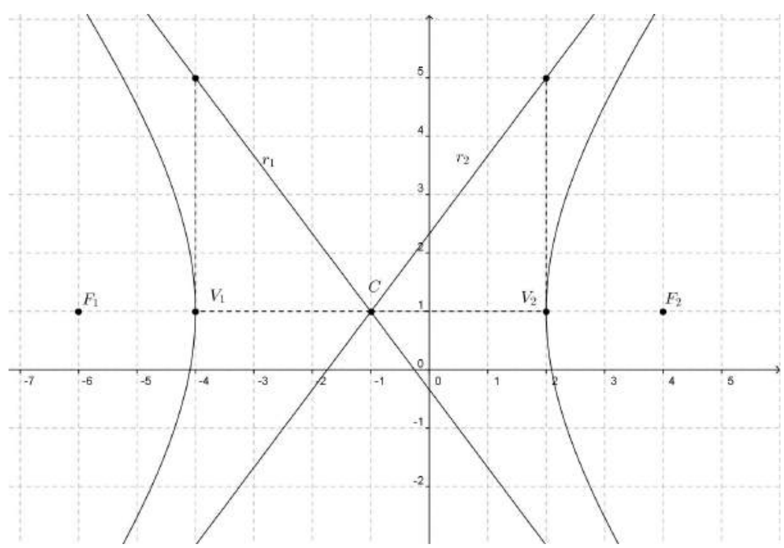
Luego

$$\begin{aligned} 16x^2 + 32x - 9y^2 + 18y - 137 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 16(x+1)^2 - 16 - 9(y-1)^2 + 9 - 137 = 0 \Leftrightarrow 16(x+1)^2 - 9(y-1)^2 = 144 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{H}$ es una hipérbola con centro en $C(-1,1)$ y eje focal paralelo al eje x, $r)\ y = 1$. Además $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$ con lo cual $a = 3$, $b = 4$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Concluimos entonces que los focos de $\mathcal{H}$ son $F_1(4,1)$ y $F_2(-6,1)$ y los vértices son $V_1(-4,1)$ y $V_2(2,1)$. Las asíntotas son r_1 de ecuación $y = -\frac{4}{3}(x+1) - 1$ y r_2 de ecuación $y = \frac{4}{3}(x+1) - 1$.

La gráfica de $\mathcal{H}$ es:

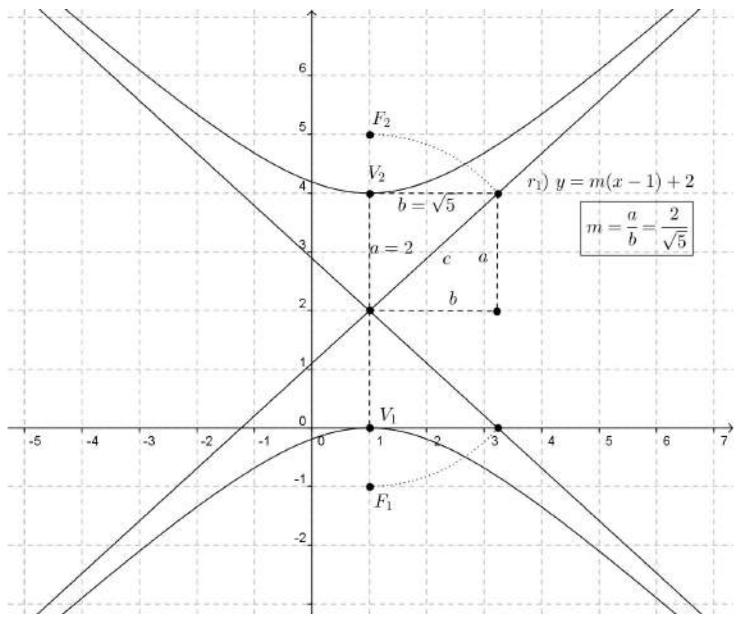


Ejemplo 60. *Consideremos la hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación*

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5}.$$

En este caso se trata de una hipérbolade centro $C(1,2)$ y eje focal $r)$ $x=1$ paralelo al eje y. Tenemos además $a^2=4$, $b^2=5$ con lo cual $a=2$, $b=\sqrt{5}$ y $c=\sqrt{4+5}=3$. Luego los focos de $\mathcal{H}$ son $F_1(1,-1)$ y $F_2(1,5)$ y los vértices son $V_1(1,0)$ y $V_2(1,4)$. La asíntotas son r_1 de ecuación $y=-\frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2$ y r_2 de ecuación $y=\frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2$.

La gráfica de $\mathcal{H}$ es



5.4 Parábola

Definición 61. *Dados una recta r y un punto F del plano tal que $F\notin r$ se denomina **parábola** de **directriz** r y foco F al lugar geométrico de los puntos del plano P que equidistan de F y r, esto es, tales que*

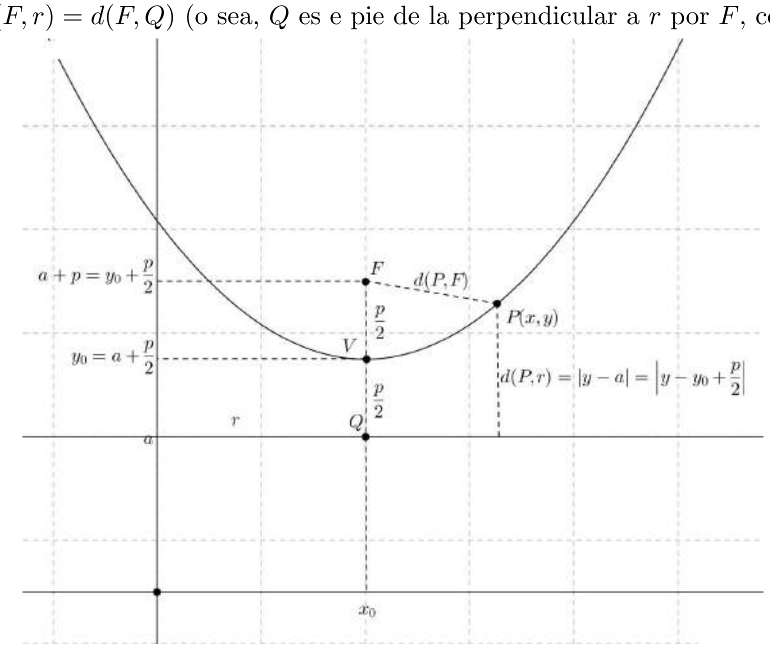
$$d(P,F)=d(P,r).$$

Encontraremos las ecuaciones de una parábola con directriz paralela al eje x o al eje y.

Comencemos analizando el caso que la directriz tiene ecuación $r)$ $y=a$. Denotemos por $\mathcal{P}(F,r)$ la parábola de directriz r y foco F. Sea

$$p=d(F,r)$$

y sea $Q(x_0,a)\in r$ tal que $d(F,r)=d(F,Q)$ (o sea, Q es e pie de la perpendicular a r por F, como se muestra en la figura).



Sea $V(x_0, y_0)$ con $y_0 = a + \frac{p}{2}$ el punto medio de $\overline{FQ}$. Entonces $d(V,F) = d(V,r) = \frac{p}{2}$. Luego $V \in \mathcal{P}(F,r)$ y se denomina el **vértice** de la parábola.

Observemos que además $a = y_0 - \frac{p}{2}$ y las coordenadas del foco F son $(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$. Por otra parte dado $P(x,y)$, resulta $d(P,r) = |y-a| = |y - y_0 + \frac{p}{2}|$ y entonces

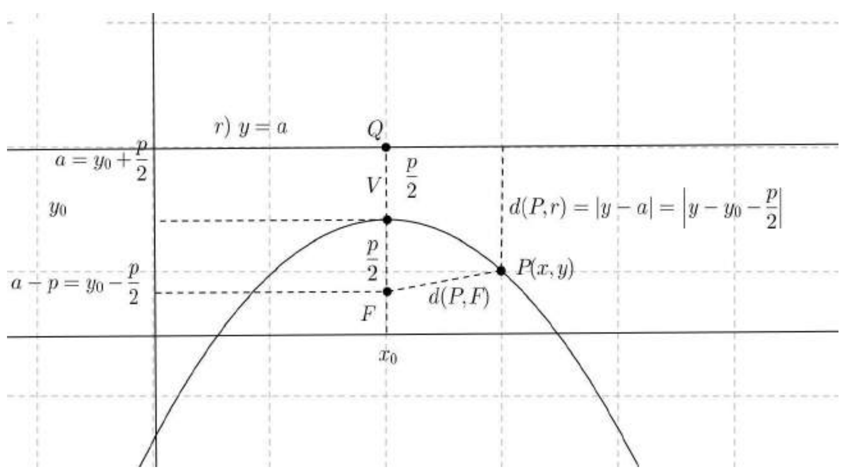
$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P}(d,r) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P,r) = d(P,F) \Leftrightarrow |y - y_0 + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y - y_0 - \frac{p}{2})^2} \\ &\Leftrightarrow \quad (y-y_0)^2 + p(y-y_0) + \frac{p^2}{4} = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - p(y-y_0) + \frac{p^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 2p(y-y_0) = (x-x_0)^2 \end{aligned}$$

Concluimos que la ecuación de la parábola $\mathcal{P}(F,r)$ es

$$\boxed{(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)} \tag{16}$$

En todo el desarrollo hemos asumido que el foco de encuentra “arriba”de la directriz, y por lo tanto las ramas de la parábola van hacia arriba. En el caso que el foco se encuentre debajo de la directriz, como se muestra en la figura, un análisis análogo muestra que las ecuaciones de la parábola son

$$\boxed{(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)} \tag{17}$$



Ejemplo 62. *En el curso de Análisis Matemático I, se ha visto que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. De hecho veremos que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es siempre la ecuación de una parábola. Basta completar cuadrados para distinguir quienes son x_0, y_0 y p en este caso. Trabajaremos con un ejemplo concreto.*

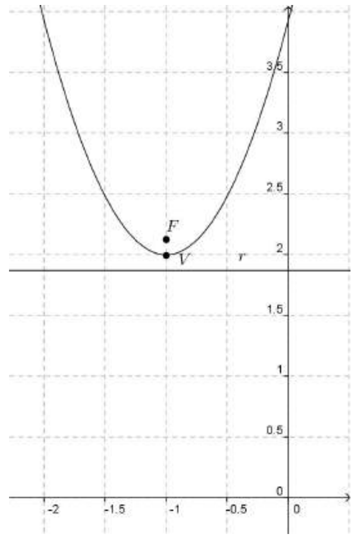
Consideremos el lugar geométrico

$$\mathcal{P}\{R(x,y) : y = 2x^2 + 4x + 4\}$$

Comenzamos completando cuadrados y tenemos $2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) = 2(x+1)^2 - 2$. Luego

$$\begin{aligned} y = 2x^2 + 4x + 4 \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2(x+1)^2 - 2 + 4 \Leftrightarrow y - 2 = 2(x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y-2) = (x+1)^2 \end{aligned}$$

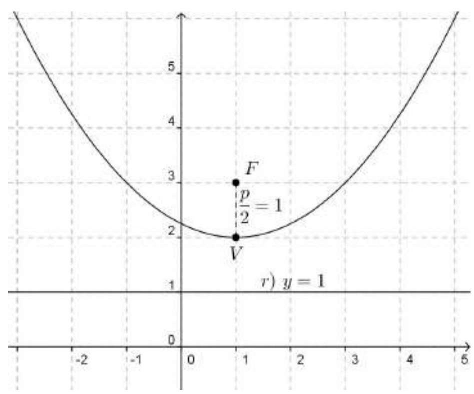
Concluimos que $\mathcal{P}$ es una parábola con $2p = \frac{1}{2}$, o sea $p = \frac{1}{4}$, de vértice $V(-1,2)$ y con directriz r paralela al eje x. Recordando que la ecuación de r es $y = a = y_0 - \frac{p}{2}$ concluimos que la directriz es $r)$ $y = \frac{15}{8}$, y el foco es $F(-1, 2 + \frac{1}{8})$, o sea $F(-1, \frac{17}{8})$. La gráfica de $\mathcal{P}$ es la que se muestra a continuación:



Ejemplo 63. *Queremos encontrar las ecuaciones de la parábola $\mathcal{P}$ de foco $F(1,3)$ y directriz $r)$ $y=1$. Entonces $p=d(F,r)=2$ y por lo tanto el vértice de la parábola es $V(1,2)$ y su ecuación es*

$$(x-1)^2 = 2(y-2).$$

Su gráfica es



Observación 64. *Si la parábola tiene directriz d paralela al eje y, foco F y vértice $V(x_0,y_0)$ y $p=d(F,d)$, entonces con un razonamiento análogo al hecho anteriormente se concluye que:*

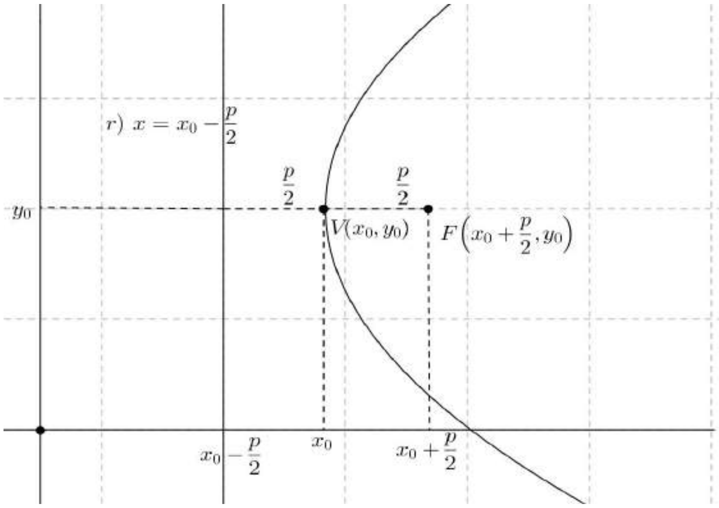
- *Si el foco está a la derecha de la directriz, las ramas de la parábola van hacia la derecha y la ecuación es*

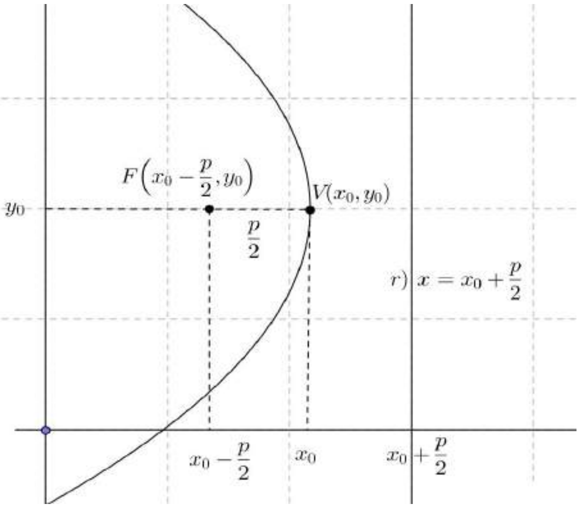
$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

- *Si el foco está a la izquierda de la directriz, las ramas de la parábola van hacia la izquierda, y la ecuación es*

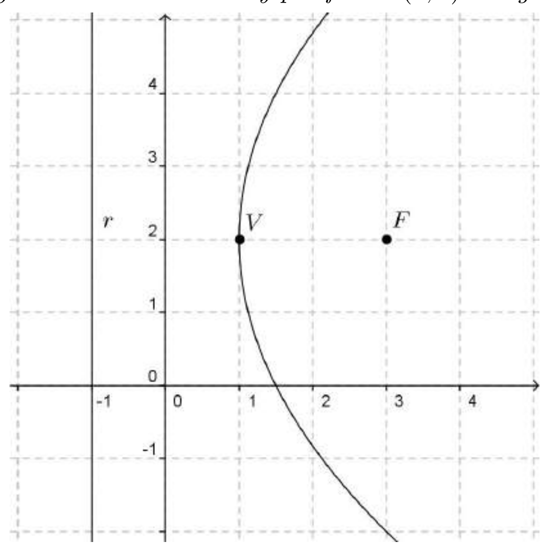
$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$$

Sus gráficas son como se muestra en la figura:





Ejemplo 65. *Sea $\mathcal{P}$ la parábola de ecuación $4(x-1) = (y-2)^2$. Entonces $\mathcal{P}$ es una parábola con vértice $V(1,2)$, $p = 4$ y por lo tanto directriz r paralela al eje y de ecuación $x = -1$ y por foco $F(3,2)$. Su gráfica es*



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ÁLGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

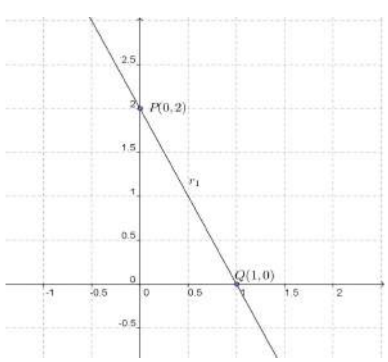
Licenciatura en Ciencias de la Computación - Año 2012

Equipo docente: Dr. Francisco Vittone, Mg. Daniela Emmanuele, Vanesa Vanteenkiste

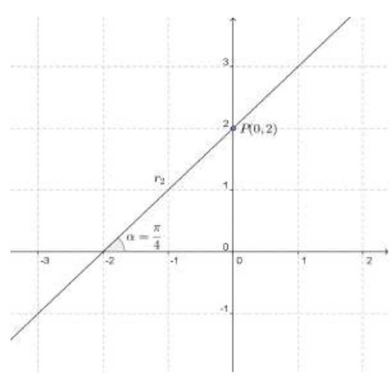
---

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7: Elementos de geometría analítica del plano

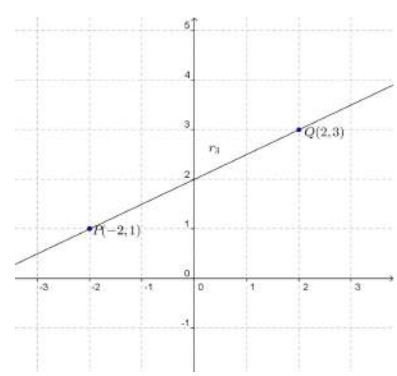
1. Consideremos la recta r de ecuaciones paramétricas
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$
   a) Determinar si alguno de los puntos $P(1,5)$ y $Q(3,-2)$ pertenecen a r.
   b) ¿Para qué valor del parámetro t se obtiene el punto $R(-2,17)$?
   c) Determinar para qué valores del parámetro t se obtienen los puntos de intersección de las rectas con cada uno de los ejes coordenados.
   d) Calcular el área del triángulo que forma la recta con los ejes coordenados.
   e) Escribir otras ecuaciones paramétricas de la misma recta.
   f) Determinar la ecuación general de la recta.
2. Sea r la recta de ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.
   a) Determinar si los puntos $P_1(2,0)$, $P_2(-1,7)$, $P_3(2,2)$, $P_4(-4,-9)$, $P_5(3,\frac{3}{2})$, $P_6(0,-4)$ pertenecen a r.
   b) Sabiendo que $Q_i \in r$, determinar la coordenada que falta: $Q_1(4,y_1)$, $Q_2(0,y_2)$, $Q_3(x_3,5)$, $Q_4(x_4,\sqrt{2})$.
3. Encontrar las ecuaciones paramétrica y general de las siguientes rectas, y representarlas gráficamente.
   a) La recta r_1 pasa por el punto $P(-1,2)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (1,-2)$.
   b) La recta r_2 pasa por los puntos $P(-1,-1)$ y $Q(1,2)$.
   c) La recta r_3 es paralela a r_1 y pasa por el punto $R(1,1)$.
   d) La recta r_4 es perpendicular a r_1 y pasa por $R(1,1)$.
   e) La recta r_5 es paralela al eje x y pasa por $T(1,2)$
   f) La recta r_6 es perpendicular al eje x y pasa por $T(1,2)$.
4. Encontrar las ecuaciones segmentaria, normal y explícita de cada una de las rectas r_1, r_2 y r_3 del ejercicio 3. Determinar además en cada caso a partir de las ecuaciones obtenidas:
   a) un versor normal a la recta;
   b) los puntos de intersección de la recta con cada uno de los ejes;
   c) la pendiente de cada recta.
5. Determinar las ecuaciones de las rectas r_1, r_2 y r_3 cuyas gráficas se muestran a continuación. En cada caso usar el tipo de ecuación más adecuado.



a)



b)



c)

6. Dados los puntos $A(3,-2)$ y $B(8,4)$, determinar la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa de un triángulo ABC isósceles y rectángulo en A.
7. Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:
   a) $r_1)\ 3x-y+2=0,\qquad r_2)\ 2x+y-2=0.$
   b) $r_1)\ x+2y+1=0,\qquad r_2)\ 2x-y-2=0.$
8. Sean r_1 y r_2 rectas de ecuaciones $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ respectivamente. Demostrar que r_1 y r_2 son perpendiculares si y sólo si $a_1a_2+b_1b_2=0$.
9. Demostrar que la ecuación de una recta que contiene a los puntos $P\ (x_0,y_0)$ y $Q(x_1,y_1)$, $x_0\neq x_1$ es
$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$
   Utilizar esta ecuación para determinar la ecuación explícita de las siguientes rectas:
   a) r_1 es la recta que pasa por $P(1,2)$ y por $Q(3,5)$.
   b) r_2 es la recta que corta al eje y en el punto de ordenada $y=5$ y pasa por $Q(1,2)$.
   c) r_3 es la recta de pendiente $m=2$ y pasa por $P(1,2)$.
10. Sean $r_1)\ y=m_1x+h_1$, $r_2)\ y=m_2x+h_2$ dos rectas dadas en sus ecuaciones explícitas.
    a) Probar que $\cos(r_1\hat{;}r_2)=\dfrac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$.
    b) Probar que r_1 y r_2 son perpendiculares si y sólo si $m_2=-\frac{1}{m_1}$.
    c) Determinar el valor de α para que las rectas
$$r_1)\ y=\frac{\alpha}{1-\alpha}x+2\frac{\alpha+2}{\alpha-1}\qquad\qquad r_2)\ y=\frac{3\alpha}{3\alpha+1}x+1$$
    sean perpendiculares.
11. Determinar la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 dadas en cada caso. Si son concurrentes, determinar el punto de intersección de las mismas.
    a) $r_1)\ -3x-y+17=0,\qquad r_2)\ x-3y-2=0;$
    b) $r_1)\ x+2y=0,\qquad r_2)\ 2x-4y+3=0;$
    c) $r_1)\begin{cases}x=2+5t\\ y=3-2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\qquad r_2)\begin{cases}x=7-\frac{15}{2}s\\ y=1+3s\end{cases},\ s\in\mathbb{R}.$
    d) $r_1)\ 3x+4y-1=0,\qquad r_2)\ -4x+3y+5=0;$
    e) $r_1)\ y+\sqrt{2}=0,\qquad r_2)\ 3y-1=0$
    f) $r_1)\begin{cases}x=1+3t\\ y=2-5t\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\qquad r_2)\begin{cases}x=4-6s\\ y=-3-15s\end{cases},\ s\in\mathbb{R}.$
12. Dadas las rectas
$$r_1)\ x-2y-2=0\qquad r_2)\ 3x-2y+6=0\qquad r_3)\ x+y-1=0$$
    a) Hallar las coordenadas de los vértices A_1, A_2 y A_3 del triángulo que ellas determinan.
    b) Determinar las longitudes de los lados del triángulo.
    c) Determinar los ángulos internos del triángulo.
13. Determinar la ecuación de una recta que contenga a la intersección de $r_1)\ 2x-y+2=0$ y $r_2)x-y+1=0$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{3}{2}$.
14. Determinar la distancia del punto $P(1,2)$ a cada una de las siguientes rectas:
    a) $r_1)\ 2x+\sqrt{5}y-2\sqrt{5}=0;$
    b) $r_2)\begin{cases}x=-1+3t\\ y=2-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R};$
    c) $r_3)\ 3x-4y+5=0$
15. Mostrar que los siguientes pares de rectas son paralelas y determinar la distancia entre ellas.
    a) $r_1)\ 12x-5y-39=0,\qquad r_2)\ -12x+5y-13=0.$
    b) $r_1)\begin{cases}x=3+5t\\ y=2+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\qquad r_2)\begin{cases}x=1+5s\\ y=-2+2s\end{cases},\ s\in\mathbb{R}.$

16. Dadas las rectas $r_1)\ 4x+3y+9=0$ y $r_2)\ x-3y+1=0$, determinar un punto $P\in r_2$ tal que:

$$i)\ d(P,r_1)=4,\quad ii)\ \overline{OP}\cap r_1=\emptyset$$

siendo O el origen de coordenadas.

17. El punto $G(-1,0)$ es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados pertenece a la recta $r_1)\ x+3y-5=0$. Determinar las ecuaciones de las rectas a las cuales pertenecen los otros tres lados.

18. Los puntos $A(2,3)$ y $B(6,4)$ son vértices de un rectángulo. Hallar las coordenadas de los otros vértices, sabiendo que una de las diagonales está contenida en la recta de ecuaciones $\begin{cases} x=2+3t \\ y=3+5t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

19. Determinar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.
    a) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(0,0)$ y el radio es $a=\sqrt{3}$.
    b) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(-2,3)$ y el radio es $a=2$.
    c) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(1,1)$ y $P(4,5)\in\mathcal{C}$.
    d) $\mathcal{C}$ pasa por $P(1,1)$ y por $Q(3,3)$ y el centro C de $\mathcal{C}$ pertenece al segmento $\overline{PQ}$.

20. Determinar el centro y el radio de las siguientes circunferencias y representarlas gráficamente.
    a) $(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$
    b) $x^2+2x+y^2-8=0$
    c) $x^2+y^2-6x+2y=-5$.

21. Dada una recta t y una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro C, decimos que t es *tangente* a $\mathcal{C}$ en $P\in\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}\cap t=\{P\}$ y $\overline{CP}\perp t$. En este caso el radio de $\mathcal{C}$ es $r=d(C,t)$.
    a) Dada la circunferencia $\mathcal{C}$ de ecuación $x^2+y^2=4$, determinar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ por el punto P dado en cada caso:
        1) $P(0,-2)$,
        2) $P(2,0)$,
        3) $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$
    b) Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en $C(1,1)$ tangente a los ejes coordenados.
    c) Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ tal que la recta $t)\ x+y-2=0$ es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $P(1,1)$.

22. Determinar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.
    a) Los focos de $\mathcal{E}$ son $F_1(0,3)$ y $F_2(0,-3)$ y $2a=10$.
    b) Los focos de $\mathcal{E}$ son $F_1(1,4)$ y $F_2(1,-3)$ y $b=4$.
    c) Los vértices de $\mathcal{E}$ son $V_(-5,1)$, $V_2(5,2)$, $V_3(0,4)$ y $V_4(0,-2)$.
    d) El centro es $C(1,2)$, uno de sus vértices es $V(1+\sqrt{5},2)$ y uno de sus focos es $F(1,-1)$.

23. Determinar los focos, el centro y los vértices de cada una de las siguientes elipses y representarlas gráficamente.
    a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$
    b) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$
    c) $3x^2-6x+4y^2=9$
    d) $4x^2+y^2+8x-2y-11=0$.

24. Determinar la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.
    a) Sus focos son $F_1(8,0)$, $F_2(-6,0)$ y $2a=10$.
    b) El eje focal es la recta $x=2$, el centro es $C(2,1)$, $c=5$ y $a=4$.
    c) Las asíntotas de la hipérbola son $r_1)\ y=x+1$, $r_2)\ y=-x+1$ y uno de sus vértices es $V(\frac{1}{2},1)$.
    d) Sus vértices son $V_1(1,0)$ y $V_2(1,2)$ y una de sus asíntotas es $r)\ y=2x-1$.

25. Determinar los focos, los vértices y las asíntotas de las siguientes hipérbolas y representarlas gráficamente.
    a) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{24}=1$
    b) $\dfrac{(y-1)^2}{48}-\dfrac{(x-2)^2}{27}=3$
    c) $16x^2-32x-9y^2=560$

   d) $y^2 - 9x^2 + 2y + 54x - 89 = 0$

26. Determinar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.
    a) La directriz es el eje x y el foco es $F(3,3)$.
    b) La directriz es el eje y y el foco es $F(-1,-1)$.
    c) El vértice es $P(1,1)$ y el foco es $F(3,1)$.
27. Determinar el foco, la directriz y el vértice de cada una de las siguientes parábolas y representarlas gráficamente.
    a) $x^2 + 4y + 4 = 0$
    b) $5y^2 - 20y - 3x + 20 = 0$
    c) $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$.
28. Determinar qué tipo de cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones, determinar sus elementos característicos (centro, radio, focos, vértices, asíntotas o directiz, según corresponda) y representarlas gráficamente.
    a) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 30y + 71 = 0$
    b) $4y^2 + 3x - 8y + 4 = 0$
    c) $2x^2 - 8y^2 + 4x + 16y + 2 = 0$
    d) $2x^2 + 2y^2 - 20x + 4y + 44 = 0$