Sistemas de ecuaciones lineales

Silvio Reggiani

Álgebra y Geometría Analítica II (LCC)
FCEIA - UNR

16 de noviembre de 2016

Estudiaremos **sistema de m ecuaciones (lineales) con n incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m
\end{aligned} \tag{S}$$

El sistema (S) se puede representar matricialmente

$$\text{(S)} \iff AX = Y$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{matriz de coeficientes}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{vector incógnita}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \text{términos independientes}$$

1. Una **solución del sistema** (S) es una n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $AX = Y$.
2. El sistema (S) se dice **homogéneo** si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$
3. Un sistema homogéneo siempre admite la solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada la **solución trivial**
4. ... aunque podría tener soluciones no triviales

Definición

Dos sistemas

$$AX = Y \tag{S1}$$
$$A'X = Y' \tag{S2}$$

con $A, A' \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $Y, Y' \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. O sea, toda solución de (S1) es solución de (S2) y viceversa.

Ejercicio

Esto efectivamente define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

Idea de trabajo: para resolver un sistema $AX = Y$ pasamos a un sistema equivalente que sea *más fácil* de resolver.

Ejemplo

Encontrar las soluciones de

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{S1}$$

- Sumamos -2 veces la 2da ecuación a la primera

$$\begin{aligned} -7x_2 - 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{S2}$$

- Multiplicamos la 1ra ecuación por $-1/7$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{S3}$$

Ejemplo (cont.)

- Sumamos -3 veces la 1ra ecuación a la 2da

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{S4}$$

- Los sistemas (S1), (S2), (S3), (S4) son equivalentes
- Solución: $x_1 = x_2 = -x_3$, o más precisamente, el **conjunto de soluciones** del sistema (S1) es

$$\{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{F}\}$$

¿Cómo podemos formalizar este procedimiento para aplicarlo a otros sistemas lineales?

Operaciones de eliminación

Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') sumando a la i-ésima ecuación α veces la k-ésima ecuación (con $k \neq i$)

- Si la i-ésima y la k-ésima ecuación de (S) son

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n = y_i$$
$$A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \cdots + A_{kn}x_n = y_k,$$

- entonces la i-ésima ecuación de (S') es

$$(A_{i1}+\alpha A_{k1})x_1+(A_{i2}+\alpha A_{k2})x_2+\cdots+(A_{in}+\alpha A_{kn})x_n = y_i+\alpha y_k$$

- Luego, los sistemas (S) y (S') son equivalentes

Se llaman **operaciones de eliminación** porque eligiendo α apropiado se pueden ir eliminando incógnitas.

Operaciones de escalamiento

Se pasa de un sistema (S) a un sistema (S') multiplicando la i-ésima ecuación por un escalar $\alpha \neq 0$

- Si la i-ésima ecuación de (S) es

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n = y_i,$$

- la i-ésima ecuación de (S') es

$$\alpha A_{i1}x_1 + \alpha A_{i2}x_2 + \cdots + \alpha A_{in}x_n = \alpha y_i,$$

- Luego (S) y (S') son equivalentes

Operaciones de intercambio

- Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') intercambiando dos ecuaciones
- Estos dos sistemas son trivialmente equivalentes
- Esta operación tiene importancia cuando trabajamos con la representación matricial

Pregunta

Si el sistema (S) se representa matricialmente por $AX = Y$, **¿cuál es la representación matricial del sistema (S')?** (En donde (S') se obtuvo aplicando alguna de las operaciones anteriores.)

Operaciones elementales por filas (OEF)

Sea A una matriz con m filas. Definimos tres tipos de **OEF** sobre A

- **Tipo I** Se multiplica la fila r por un escalar $\alpha \neq 0$
- **Tipo II** Se suma a la fila r, α veces la fila s, con $r \neq s$
- **Tipo III** Se intercambia la fila r con la fila s

Más precisamente, una OEF e sobre A devuelve la matriz $e(A)$ dada por

Tipo I $$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ \alpha A_{rj}, & i = r \end{cases}$$

Tipo II $$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r \end{cases}$$

Tipo III $$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, s \\ A_{sj}, & i = r \\ A_{rj}, & i = s \end{cases}$$

Observación

Las OEF también se pueden aplicar a vectores columna de tamaño m (o sea, con m filas)

Teorema

Sean $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $Y \in \mathbb{F}^{m\times 1}$. *Si* e *es una OEF entonces los sistemas*

$$AX = Y, \qquad\qquad e(A)X = e(Y)$$

son equivalentes.

Definición

Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Se dice que B es **equivalente por filas** a A si se puede pasar de A a B por una sucesión finita de OEF.

Ejercicio

Equivalencia por filas es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Corolario

Si B es equivalente por filas a A, entonces los sistemas

$$AX = 0, \qquad\qquad BX = 0$$

son equivalentes.

Dem.

- Existen OEF $e_1, e_2, \ldots, e_k$ tales que $B = e_k(\cdots e_2(e_1(A)))$
- Toda solución de $AX = 0$ es solución de $BX = 0$. En efecto,
- $AX = 0 \implies e_1(A)X = 0$
- $e_1(A)X = 0 \implies e_2(e_1(A))X = 0$
- $\ldots$
- $\ldots \implies \cdots \implies e_k(\cdots e_2(e_1(A)))X = BX = 0$
- Toda solución de $BX = 0$ es solución de $AX = 0$. En efecto,
- B equivalente por filas a $A \implies A$ equivalente por filas a B.
- Luego el argumento anterior también sirve para demostrar esto. $\square$

Ejemplo

Resolver el sistema (homogéneo)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{S}$$

- El sistema (S) se representa matricialmente como $AX = 0$ en donde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
- Aplicamos OEF sobre A para pasar a un sistema equivalente más fácil de resolver

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - 2\mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f}_3 \to \mathtt{f}_3 - 2\mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{\mathtt{f}_3 \to -\frac{1}{2}\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 - 4\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 + 9\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo I}]{\mathtt{f}_1 \to \frac{2}{15}\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + 2\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f}_3 \to \mathtt{f}_3 - \frac{1}{2}\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} =: R$$

Ejemplo (cont.)

- El sistema $AX = 0$ es equivalente a $RX = 0$
- O sea, es equivalente a

$$\begin{aligned} x_3 - \frac{11}{3}x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{17}{3}x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- Puedo poner todo en función de x_4

$$x_1 = -\frac{17}{3}x_4 \qquad x_2 = \frac{5}{3}x_4 \qquad x_3 = \frac{11}{3}x_4$$

- $\text{Sol} = \left\{\left(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c\right) : c \in \mathbb{F}\right\}$

$$= \{(-17c, 5c, 11c, 3c) : c \in \mathbb{F}\}$$

Matrices elementales

Sea e una OEF que aplica sobre matrices con m filas. La **matriz elemental asociada a** e es $E = e(I)$ en donde I es la matriz identidad $m \times m$.

Ejemplo ($m = 4$)

$e = "\mathtt{f}_2 \leftrightarrow \mathtt{f}_4"$ $\qquad$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e = "\mathtt{f}_3 \to \alpha \mathtt{f}_3"$ $\qquad$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e = "\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 + \alpha \mathtt{f}_4"$ $\qquad$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema

Sea e una OEF y sea $E = e(I_m)$ su correspondiente matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ vale

$$e(A) = EA$$

Dem.

Hay tres casos según el tipo de OEF. Haremos la prueba para operaciones Tipo I y II, dejando como ejercicio las del Tipo III.

Dem. (cont.)

Tipo I

- $e = "\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}"$, $\alpha \neq 0$,
- $E = e(I) = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r \\ \alpha \delta_{rj}, & i = r \end{cases}$
- $(EA)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha \delta_{rk} A_{kj} = \alpha A_{rj}, & i = r \end{cases}$
- Luego $EA = e(A)$

Dem. (cont.)

Tipo II

- $e = "\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}"$, $r \neq s$
- $E = e(I) = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r \\ \delta_{rj} + \alpha\delta_{sj}, & i = r \end{cases}$
- Calculamos $(EA)_{ij}$ para $i \neq r$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}$$

- Calculamos $(EA)_{rj}$

$$\begin{aligned}(EA)_{rj} &= \sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + \alpha\delta_{sk}) A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk} A_{kj} + \alpha \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk} A_{kj} = A_{rj} + \alpha A_{sj}\end{aligned}$$

Dem. (cont.)

- $(EA)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r \end{cases}$
- Luego $(EA) = e(A)$ $\square$

Observación importante

Las matrices elementales son invertibles.

Dem 1 El determinante de una matriz elemental es siempre no nulo (¿por qué?), y por lo tanto la matriz resulta invertible.

Dem 2 Las OEF son "invertibles".

Tipo I

$$e = \text{"}\mathtt{f_r} \to \alpha\mathtt{f_r}\text{"},\ \alpha \neq 0, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{-1} = \text{"}\mathtt{f_r} \to \frac{1}{\alpha}\mathtt{f_r}\text{"}, \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo II

$$e = \text{"}\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}\text{"},\ r \neq s, \qquad e^{-1} = \text{"}\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} - \alpha \mathtt{f_s}\text{"}$$

Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo III

- $e = "\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}" \implies e^{-1} = e$
- $E^{-1} = E$

Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{-1}$$

Comentario

Las matrices que son su propia inversa se llaman **involutivas**.

Matrices escalón reducidas por filas (ERF)

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ se dice **reducida por filas (RF)** si

- El 1er elemento no nulo de cada fila no nula es igual a 1
- Toda columna que contenga el 1er elemento de una fila no nula tiene sus demás elementos iguales a 0

Ejemplo

¿Son RF las siguientes matrices?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{no,} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{no,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sí,} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sí.}$$

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ se dice **escalón reducida por filas (ERF)** si

- A es reducida por filas
- Toda fila nula de A está debajo de todas las filas no nulas
- Si $1, 2, \ldots, r$ son las filas no nulas de A y el primer elemento no nula de la fila i está en la columna k_i, entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Estas matrices son muy importantes porque un sistema lineal representado por una matriz ERF *ya viene resuelto*.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{RF pero no ERF}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{RF pero no ERF}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ERF}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ERF}$$

El sistema lineal (homogéneo) asociado $AX = 0$ es

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

- x_1, x_3, x_5 son parámetros libres
- x_2, x_4 se pueden poner en función de x_1, x_3, x_5
- $\text{Sol} = \left\{\left(x_1, 3x_3 - \frac{1}{2}x_5, x_3, -2x_5, x_5\right) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F}\right\}$

Teorema

Toda matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz ERF. En otras palabras, existes matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

es ERF.

Dem.

Ejercicio (intentar hacer un programa que devuelva la forma ERF de una matriz A). $\square$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{S}$$

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 - 2\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f}_2 \leftrightarrow \mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - \mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f}_3 \to \mathtt{f}_3 + 2\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_3 \to -\frac{1}{3}\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - 2\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + 2\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (cont.)

Luego el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{4}{3}x_4 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_4 &= 0 \\ x_3 + \frac{5}{3}x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{S'}$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \left\{ \left(\frac{4}{3}c, -\frac{1}{3}c, -\frac{5}{3}c, c \right) : c \in \mathbb{F} \right\} \\ &= \{(4c, -c, -5c, 3c) : c \in \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

Ejercicio

En el ejemplo anterior, encontrar matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $E_k \cdots E_1 A$ es ERF.

Teorema

Si $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *con* $m < n$ *entonces el sistema homogéneo* $AX = 0$ *admite una solución no trivial. En otras palabras, un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene una solución no trivial.*

Dem.

- A es equivalente por filas a una matriz R ERF
- Sean $1, \dots, r$ las filas no nulas de R
- $r \leq m < n$
- Sean $k_1, \dots k_r$ las columnas de R en donde aparece el 1er elemento no nulo de las filas $1, \dots, r$
- $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ se pueden escribir como combinación lineal de los otros parámetros
- Para cada elección de x_i, con $i \neq k_1, \dots, k_r$ se obtiene una solución de $AX = 0$ $\square$

Resolución de sistemas no homogéneos

Para resolver un sistema lineal (no homogéneo)

$$AX = Y$$

debemos aplicar al vector de los términos independientes cada una de las OEF que aplicamos a A para llevarla a su forma ERF.

Para ello es conveniente pasar a la **matriz ampliada** A' que se obtiene agregando a A la columna Y, y luego aplicar las OEF directamente sobre A'

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned} \tag{S}$$

En forma matricial $AX = Y$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Llevamos a la forma ERF

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Luego el sistema (S) es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 9 \qquad \text{¡No tiene solución!} \end{aligned}$$

Recordemos la terminología que se usa para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a sus conjuntos de soluciones.

Sistema incompatible No existe solución

Sistema compatible Hay dos casos:

- **Determinado** Existe una única solución
- **Indeterminado** Existe más de una solución

Observación

Si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad \text{(S)}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + 2\mathtt{f}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \qquad \text{compatible indeterminado} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \{(1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\} \\ &= \{\ \underbrace{(1, 0, 0)}_{\text{Sol de } AX = Y} + \underbrace{(2x_2 - x_3, x_2, x_3)}_{\text{Sol de } AX = 0} : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

Teorema

Consideremos el sistema

$$AX = Y \tag{S}$$

con $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $Y \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ *y sea* X_0 *una solución de (S) (o sea,* X_0 *es tal que* $AX_0 = Y$*). Entonces el conjunto de soluciones de (S) es*

$$\mathrm{Sol} = \{X_0 + X_h : X_h \text{ es solución de } AX = 0\}.$$

O sea, toda solución de (S) se escribe como una solución particular más una solución del sistema homogéneo.

Dem.

- $AX_h = 0 \implies A(X_0 + X_h) = AX_0 + AX_h = AX_0 + 0 = Y$
- $X_0 + X_h$ es solución de (S)
- Recíprocamente, si $AX = Y$ escribimos $X = X_0 + (-X_0 + X)$
- Notar que $A(-X_0 + X) = -AX_0 + AX = -Y + Y = 0$
- Luego $X_h := -X_0 + X$ es solución del sistema homogéneo $\square$

Ejemplo

Encontrar a, b tales que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= a \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= b + 1 \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= a + b + 1 \end{aligned} \tag{S}$$

tenga solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & b+1 \\ -3 & -6 & 3 & a+b+1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4a+b+1 \end{array} \right)$$

Luego, obtenemos un sistema lineal en a, b que nos da las condiciones para que el sistema (S) sea compatible

$$\begin{aligned} -2a + b &= -1 \\ 4a + b &= -1 \end{aligned} \tag{S'}$$

Ejemplo (cont.)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $a = 0$, $b = -1$ y el sistema (S) es equivalente a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\mathrm{Sol} = \{(-2x_2 + x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

Sistemas cuadrados

Teorema

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$*. Son equivalentes:*

1. *A es invertible;*
2. *el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única (la solución trivial $X = 0$);*
3. *el sistema $AX = Y$ tiene solución única para cada $Y \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.*

Dem.

$(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})$

- A invertible $\implies$ existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$
- $AX = 0 \implies X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$

$(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{3})$

- $AX = Y \implies X = A^{-1}Y$ (la solución es única)

Dem. (cont.)

$(\mathbf{3}) \implies (\mathbf{2})$ Trivial, tomando $Y = 0$

$(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{3})$

- Sea R la forma ERF de A
- R es triangular superior
- $AX = 0$ tiene solución única $\implies RX = 0$ tiene solución única $\implies R = I$ (si la última fila de R fuera nula, podemos poner una incógnita en función de las demás)
- Luego A es equivalente por filas a $R = I$
- Luego existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

- Por tanto $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$ $\square$

Muy importante

La demostración del teorema anterior nos da un método eficiente para calcular la inversa de una matriz A tal que $\det A \neq 0$.

- $\det A \neq 0 \implies A$ es equivalente por filas a I
- Si $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son las OEF que aplicamos a A para llevarla a I, y E_i es la matriz identidad, entonces

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = e_k(\cdots e_2(e_1(I)))$$

- En palabras: **si aplicamos a la matriz identidad las mismas OEF que le aplicamos a A para llegar a I, lo que se obtiene es la matriz inversa A^{-1}**

Ejemplo

Encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Ejemplo (cont.)

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|rrr}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60 \\
0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\
0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180
\end{array}
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio

Verdadero o Falso: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

es invertible y A^{-1} tiene coeficientes enteros.

Eliminación Gaussiana

Es un método para llevar $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a su forma ERF

1. Ir a la 1ra columna no nula de A. Si el 1er elemento es cero intercambiamos la 1ra fila con alguna fila que tenga un elemento no nulo en esa columna (si no, lo dejamos como está)
2. Obtener ceros debajo de este elemento usando OEF de tipo II
3. Aplicar el mismo procedimiento a la submatriz que se obtiene quitando la 1ra fila y la 1ra columna no nulas
4. Hacer unos en los 1ros elementos no nulos de cada fila no nula usando OEF tipo II y ceros arriba de éstos usando OEF tipo II

Complejidad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k &= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &\approx \frac{n^3}{3}, \qquad\qquad n \to \infty\end{aligned}$$

Observación

- El problema de calcular el determinante de una matriz $n \times n$ tiene una complejidad de $n^3/3$ si usamos eliminación gaussiana para pasar a una matriz triangular superior (hay que recordar qué OEF tipo I y III hicimos porque éstas cambian el determinante)
- Si lo hacemos por definición la complejidad es $n! \gg n^3/3$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \\ -3x - y + 2z &= -11 \\ -2x + y + 2z &= -3 \end{aligned} \tag{S}$$

Usamos eliminación gaussiana:

Ejemplo (cont.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f}_3 \to -\mathtt{f}_3]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f}_2 \to 2\mathtt{f}_2]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f}_1 \to \frac{1}{2}\mathtt{f}_1]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ejemplo (cont.)

Luego, el sistema tiene solución única $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$

Además, las cuentas que hicimos nos permiten calcular fácilmente el determinante de la matriz A de coeficientes del sistema (S):

- A es equivalente por filas a la matriz identidad I
- Para pasar de A a I usando OEF hicimos
  - OEF Tipo II (no cambian el determinante)
  - 3 OEF Tipo I: $e_1 = "\mathtt{f}_1 \to -\mathtt{f}_1"$, $e_2 = "\mathtt{f}_2 \to 2\mathtt{f}_2"$, $e_3 = "\mathtt{f}_3 \to \frac{1}{2}\mathtt{f}_3"$
  - No hicimos OEF Tipo III

Luego

$$1 = \det I = \det(e_3(e_2(e_1(A)))) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \det A$$

y por ende

$$\det A = -1$$

Aplicación a determinantes

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se dice

- **no-singular** si el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única. O sea, $AX = 0 \implies X = 0$
- **singular** si no es no-singular. O sea, existe $0 \neq X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ tal que $AX = 0$

Observación importante

Sigue de los resultados anteriores que

- A no-singular $\iff \det A \neq 0$ (pues ser no-singular es equivalente a ser invertible)
- A singular $\iff \det A = 0$

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado

Teorema

Dadas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$*, se tiene*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Antes de dar la prueba necesitamos algunos lemas previos

Lema

Sea $E \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *una matriz elemental asociada a una OEF* e*. Entonces*

1. $e = "\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}" \implies \det E = \alpha,\ \alpha \neq 0$
2. $e = "\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}" \implies \det E = 1,\ r \neq s$
3. $e = "\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}" \implies \det E = -1,\ r \neq s$

Dem.

Sigue de las propiedades del determinante, pues $E = e(I)$. $\square$

Lema

Sea E una matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ vale

$$\det(EA) = (\det E)(\det A).$$

Dem.

Por hipótesis $E = e(I)$ para alguna OEF e. Tenemos que analizar tres casos de acuerdo a si e es Tipo I, II o III.

Tipo I

- $e = $ "$\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}$", $\alpha \neq 0$
- $\det(EA) = \det(e(A)) = \alpha \det A$ (prop. del determinante)
- $(\det E)(\det A) = \alpha \det A$ (lema previo)
- $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.

Tipo II y III hacerlo como ejercicio. □

Dem. del teorema

Distinguimos dos casos:

A **singular.**

- Si B es singular entonces existe $X \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} BX = 0 &\implies ABX = 0 \implies AB \text{ es singular} \\ &\implies 0 = \det(AB) = \underbrace{(\det A)}_{=0}(\det B) \end{aligned}$$

- Si B es no singular, entonces B es invertible. Como A es singular, existe $X \neq 0$ tal que $AX = 0 \implies AB(B^{-1}X) = 0$ con $B^{-1}X \neq 0$. Luego AB es singular y por ende $\det(AB) = 0$
- En cualquiera de los dos casos $0 = \det(AB) = (\det A)(\det B)$

Dem. del teorema (cont.)

A **no-singular**

- $AX = 0 \implies X = 0$
- A es equivalente por filas a la matriz identidad
- Existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

- $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ y E_i^{-1} también es una matriz elemental
- Por el Lema, $\det A = (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1})$
- $AB = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$
- Por el Lema

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1})(\det B) \\ &= (\det A)(\det B) \quad \square \end{aligned}$$

Regla de Cramer

Teorema (Cramer)

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz invertible. Entonces la (única) solución del sistema $AX = Y$ está dada por

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

donde A_i es la matriz que se obtiene de A reemplazando la i-ésima columna por el vector Y

Dem.

Como A es no-singular, resulta invertible y por ende, $X = A^{-1}Y$. La demostración usa la expresión para A^{-1} en términos de la matriz adjunta.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A, \qquad (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(j|i)$$

Dem. (cont.)

$$\begin{aligned}
x_i = (A^{-1}Y)_i &= \frac{1}{\det A}((\operatorname{adj} A)Y)_{i1} \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{adj} A)_{ij}y_j \\
&= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\underbrace{y_j}_{(A_i)_{ji}}\underbrace{\det A(j|i)}_{A_i(j|i)} \\
&= \frac{1}{\det A}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(A_i)_{ji}\det A_i(j|i)}_{\det A_i,\ \text{desarrollo por la columna } i} \\
&= \frac{\det A_i}{\det A} \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

en donde $ad - bc = 0$.

Aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = \frac{ud - bv}{ad - bc}$$

$$y = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = \frac{av - uc}{ad - bc}$$