

Sistemas de ecuaciones lineales

Silvio Reggiani

Álgebra y Geometría Analítica II (LCC)
FCEIA - UNR

30 de noviembre de 2016

Estudiaremos **sistema de m ecuaciones (lineales) con n incógnitas** x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \tag{S}$$

El sistema (S) se puede representar matricialmente

$$(S) \iff AX = Y$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{matriz de coeficientes}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{vector incógnita}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{términos independientes}$$

- 1 Una **solución del sistema** (S) es una n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) tal que $AX = Y$.
- 2 El sistema (S) se dice **homogéneo** si $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$
- 3 Un sistema homogéneo siempre admite la solución $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, llamada la **solución trivial**
- 4 ... aunque podría tener soluciones no triviales

Definición

Dos sistemas

$$AX = Y \quad (S1)$$

$$A'X = Y' \quad (S2)$$

con $A, A' \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $Y, Y' \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. O sea, toda solución de (S1) es solución de (S2) y viceversa.

Ejercicio

Esto efectivamente define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

Idea de trabajo: para resolver un sistema $AX = Y$ pasamos a un sistema equivalente que sea *más fácil* de resolver.

Ejemplo

Encontrar las soluciones de

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}\tag{S1}$$

- Sumamos -2 veces la 2da ecuación a la primera

$$\begin{aligned}-7x_2 - 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}\tag{S2}$$

- Multiplicamos la 1ra ecuación por $-1/7$

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}\tag{S3}$$

Ejemplo (cont.)

- Sumamos -3 veces la 1ra ecuación a la 2da

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 0\end{aligned}\tag{S4}$$

- Los sistemas (S1), (S2), (S3), (S4) son equivalentes
- Solución: $x_1 = x_2 = -x_3$, o más precisamente, el **conjunto de soluciones** del sistema (S1) es

$$\{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{F}\}$$

¿Cómo podemos formalizar este procedimiento para aplicarlo a otros sistemas lineales?

Operaciones de eliminación

Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') sumando a la i -ésima ecuación α veces la k -ésima ecuación (con $k \neq i$)

- Si la i -ésima y la k -ésima ecuación de (S) son

$$\begin{aligned}A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n &= y_i \\A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \cdots + A_{kn}x_n &= y_k,\end{aligned}$$

- entonces la i -ésima ecuación de (S') es

$$(A_{i1} + \alpha A_{k1})x_1 + (A_{i2} + \alpha A_{k2})x_2 + \cdots + (A_{in} + \alpha A_{kn})x_n = y_i + \alpha y_k$$

- Luego, los sistemas (S) y (S') son equivalentes

Se llaman **operaciones de eliminación** porque eligiendo α apropiado se pueden ir eliminando incógnitas.

Operaciones de escalamiento

Se pasa de un sistema (S) a un sistema (S') multiplicando la i -ésima ecuación por un escalar $\alpha \neq 0$

- Si la i -ésima ecuación de (S) es

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n = y_i,$$

- la i -ésima ecuación de (S') es

$$\alpha A_{i1}x_1 + \alpha A_{i2}x_2 + \cdots + \alpha A_{in}x_n = \alpha y_i,$$

- Luego (S) y (S') son equivalentes

Operaciones de intercambio

- Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') intercambiando dos ecuaciones
- Estos dos sistemas son trivialmente equivalentes
- Esta operación tiene importancia cuando trabajamos con la representación matricial

Pregunta

Si el sistema (S) se representa matricialmente por $AX = Y$, **¿cuál es la representación matricial del sistema (S')?** (En donde (S') se obtuvo aplicando alguna de las operaciones anteriores.)

Operaciones elementales por filas (OEF)

Sea A una matriz con m filas. Definimos tres tipos de **OEF** sobre A

Tipo I Se multiplica la fila r por un escalar $\alpha \neq 0$

Tipo II Se suma a la fila r , α veces la fila s , con $r \neq s$

Tipo III Se intercambia la fila r con la fila s

Más precisamente, una OEF e sobre A devuelve la matriz $e(A)$ dada por

$$\text{Tipo I } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ \alpha A_{rj}, & i = r \end{cases}$$

$$\text{Tipo II } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r \end{cases}$$

$$\text{Tipo III } e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, s \\ A_{sj}, & i = r \\ A_{rj}, & i = s \end{cases}$$

Observación

Las OEF también se pueden aplicar a vectores columna de tamaño m (o sea, con m filas)

Teorema

Sean $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{F}^{m \times 1}$. Si e es una OEF entonces los sistemas

$$AX = Y, \quad e(A)X = e(Y)$$

son equivalentes.

Definición

Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Se dice que B es **equivalente por filas** a A si se puede pasar de A a B por una sucesión finita de OEF.

Ejercicio

Equivalencia por filas es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^{m \times n}$.

Corolario

Si B es equivalente por filas a A , entonces los sistemas

$$AX = 0, \qquad BX = 0$$

son equivalentes.

Dem.

- Existen OEF e_1, e_2, \dots, e_k tales que $B = e_k(\dots e_2(e_1(A)))$
- Toda solución de $AX = 0$ es solución de $BX = 0$. En efecto,
- $AX = 0 \implies e_1(A)X = 0$
- $e_1(A)X = 0 \implies e_2(e_1(A))X = 0$
- ...
- $\dots \implies \dots \implies e_k(\dots e_2(e_1(A)))X = BX = 0$
- Toda solución de $BX = 0$ es solución de $AX = 0$. En efecto,
- B equivalente por filas a $A \implies A$ equivalente por filas a B .
- Luego el argumento anterior también sirve para demostrar esto. □

Ejemplo

Resolver el sistema (homogéneo)

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_1 + 4x_2 - x_4 &= 0 \\2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0\end{aligned}\tag{S}$$

- El sistema (S) se representa matricialmente como $AX = 0$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Aplicamos OEF sobre A para pasar a un sistema equivalente más fácil de resolver

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{f_1 \rightarrow f_1 - 2f_2} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{f_3 \rightarrow f_3 - 2f_2} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{f_3 \rightarrow -\frac{1}{2}f_3} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{f_2 \rightarrow f_2 - 4f_3} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{f_1 \rightarrow f_1 + 9f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo I}]{f_1 \rightarrow \frac{2}{15}f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{f_2 \rightarrow f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{f_3 \rightarrow f_3 - \frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} =: R$$

Ejemplo (cont.)

- El sistema $AX = 0$ es equivalente a $RX = 0$
- O sea, es equivalente a

$$x_3 - \frac{11}{3}x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{17}{3}x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{5}{3}x_4 = 0$$

- Puedo poner todo en función de x_4

$$x_1 = -\frac{17}{3}x_4 \quad x_2 = \frac{5}{3}x_4 \quad x_3 = \frac{11}{3}x_4$$

- Sol = $\left\{ \left(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c \right) : c \in \mathbb{F} \right\}$
= $\{ (-17c, 5c, 11c, 3c) : c \in \mathbb{F} \}$

Matrices elementales

Sea e una OEF que aplica sobre matrices con m filas. La **matriz elemental asociada a e** es $E = e(I)$ en donde I es la matriz identidad $m \times m$.

Ejemplo ($m = 4$)

$$e = "f_2 \leftrightarrow f_4"$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e = "f_3 \rightarrow \alpha f_3"$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e = "f_1 \rightarrow f_1 + \alpha f_4"$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

Sea e una OEF y sea $E = e(I_m)$ su correspondiente matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ vale

$$e(A) = EA$$

Dem.

Hay tres casos según el tipo de OEF. Haremos la prueba para operaciones Tipo I y II, dejando como ejercicio las del Tipo III.

Dem. (cont.)

Tipo I

- $e = "f_r \rightarrow \alpha f_r", \alpha \neq 0,$

- $E = e(I) = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r \\ \alpha \delta_{rj}, & i = r \end{cases}$

- $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^m \alpha \delta_{rk} A_{kj} = \alpha A_{rj}, & i = r \end{cases}$

- Luego $EA = e(A)$

Dem. (cont.)

Tipo II

- $e = "f_r \rightarrow f_r + \alpha f_s", r \neq s$
- $E = e(I) = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r \\ \delta_{rj} + \alpha \delta_{sj}, & i = r \end{cases}$
- Calculamos $(EA)_{ij}$ para $i \neq r$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}$$

- Calculamos $(EA)_{rj}$

$$\begin{aligned} (EA)_{rj} &= \sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^m (\delta_{rk} + \alpha \delta_{sk}) A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{rk} A_{kj} + \alpha \sum_{k=1}^m \delta_{sk} A_{kj} = A_{rj} + \alpha A_{sj} \end{aligned}$$

Dem. (cont.)

- $(EA)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r \end{cases}$

- Luego $(EA) = e(A)$



Observación importante

Las matrices elementales son invertibles.

Dem 1 El determinante de una matriz elemental es siempre no nulo (¿por qué?), y por lo tanto la matriz resulta invertible.

Dem 2 Las OEF son “invertibles”.

Tipo I

$$e = "f_r \rightarrow \alpha f_r", \alpha \neq 0, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{-1} = "f_r \rightarrow \frac{1}{\alpha} f_r", \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo II

$$e = "f_r \rightarrow f_r + \alpha f_s", \quad r \neq s, \quad e^{-1} = "f_r \rightarrow f_r - \alpha f_s"$$

Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo III

- $e = "f_r \leftrightarrow f_s" \implies e^{-1} = e$
- $E^{-1} = E$

Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{-1}$$

Comentario

Las matrices que son su propia inversa se llaman **involutivas**.

Matrices escalón reducidas por filas (ERF)

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ se dice **reducida por filas (RF)** si

- El 1er elemento no nulo de cada fila no nula es igual a 1
- Toda columna que contenga el 1er elemento de una fila no nula tiene sus demás elementos iguales a 0

Ejemplo

¿Son RF las siguientes matrices?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	no,	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	no,
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	sí,	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	sí.

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ se dice **escalón reducida por filas (ERF)** si

- A es reducida por filas
- Toda fila nula de A está debajo de todas las filas no nulas
- Si $1, 2, \dots, r$ son las filas no nulas de A y el primer elemento no nula de la fila i está en la columna k_i , entonces $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Estas matrices son muy importantes porque un sistema lineal representado por una matriz ERF *ya viene resuelto*.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RF pero no ERF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

RF pero no ERF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ERF

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ERF}$$

El sistema lineal (homogéneo) asociado $AX = 0$ es

$$x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0$$

$$x_4 + 2x_5 = 0$$

- x_1, x_3, x_5 son parámetros libres
- x_2, x_4 se pueden poner en función de x_1, x_3, x_5
- $\text{Sol} = \left\{ (x_1, 3x_3 - \frac{1}{2}x_5, x_3, -2x_5, x_5) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F} \right\}$

Teorema

Toda matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ es equivalente por filas a una matriz ERF. En otras palabras, existen matrices elementales E_1, E_2, \dots, E_k tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

es ERF.

Dem.

Ejercicio (intentar hacer un programa que devuelva la forma ERF de una matriz A). □

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\2x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0\end{aligned} \tag{S}$$

Ejemplo (cont.)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \rightarrow f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{f_3 \rightarrow f_3 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \rightarrow -\frac{1}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{f_1 \rightarrow f_1 - 2f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_2 + 2f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo (cont.)

Luego el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}x_1 - \frac{4}{3}x_4 &= 0 \\x_2 + \frac{1}{3}x_4 &= 0 \\x_3 + \frac{5}{3}x_4 &= 0\end{aligned}\tag{S'}$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\begin{aligned}\text{Sol} &= \left\{ \left(\frac{4}{3}c, -\frac{1}{3}c, -\frac{5}{3}c, c \right) : c \in \mathbb{F} \right\} \\&= \{(4c, -c, -5c, 3c) : c \in \mathbb{F}\}\end{aligned}$$

Ejercicio

En el ejemplo anterior, encontrar matrices elementales E_1, \dots, E_k tales que $E_k \cdots E_1 A$ es ERF.

Teorema

Si $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ con $m < n$ entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ admite una solución no trivial. En otras palabras, un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene una solución no trivial.

Dem.

- A es equivalente por filas a una matriz R ERF
- Sean $1, \dots, r$ las filas no nulas de R
- $r \leq m < n$
- Sean k_1, \dots, k_r las columnas de R en donde aparece el 1er elemento no nulo de las filas $1, \dots, r$
- x_{k_1}, \dots, x_{k_r} se pueden escribir como combinación lineal de los otros parámetros
- Para cada elección de x_i , con $i \neq k_1, \dots, k_r$ se obtiene una solución de $AX = 0$



Resolución de sistemas no homogéneos

Para resolver un sistema lineal (no homogéneo)

$$AX = Y$$

debemos aplicar al vector de los términos independientes cada una de las OEF que aplicamos a A para llevarla a su forma ERF.

Para ello es conveniente pasar a la **matriz ampliada** A' que se obtiene agregando a A la columna Y , y luego aplicar las OEF directamente sobre A'

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7\end{aligned}\tag{S}$$

En forma matricial $AX = Y$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Llevamos a la forma ERF

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_2 + 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

Luego el sistema (S) es equivalente a

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 9 \quad \text{¡No tiene solución!}\end{aligned}$$

Recordemos la terminología que se usa para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a sus conjuntos de soluciones.

Sistema incompatible No existe solución

Sistema compatible Hay dos casos:

Determinado Existe una única solución

Indeterminado Existe más de una solución

Observación

Si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2\end{aligned}\tag{S}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_2 + 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Luego, el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \quad \text{compatible indeterminado}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sol} &= \{(1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\} \\ &= \{ \underbrace{(1, 0, 0)}_{\text{Sol de } AX = Y} + \underbrace{(2x_2 - x_3, x_2, x_3)}_{\text{Sol de } AX = 0} : x_2, x_3 \in \mathbb{F} \}\end{aligned}$$

Teorema

Consideremos el sistema

$$AX = Y \quad (S)$$

con $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $Y \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ y sea X_0 una solución de (S) (o sea, X_0 es tal que $AX_0 = Y$). Entonces el conjunto de soluciones de (S) es

$$\text{Sol} = \{X_0 + X_h : X_h \text{ es solución de } AX = 0\}.$$

O sea, toda solución de (S) se escribe como una solución particular más una solución del sistema homogéneo.

Dem.

- $AX_h = 0 \implies A(X_0 + X_h) = AX_0 + AX_h = AX_0 + 0 = Y$
- $X_0 + X_h$ es solución de (S)
- Recíprocamente, si $AX = Y$ escribimos $X = X_0 + (-X_0 + X)$
- Notar que $A(-X_0 + X) = -AX_0 + AX = -Y + Y = 0$
- Luego $X_h := -X_0 + X$ es solución del sistema homogéneo \square

Ejemplo

Encontrar a, b tales que el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= a \\2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= b + 1 \\-3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= a + b + 1\end{aligned}\tag{S}$$

tenga solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & b+1 \\ -3 & -6 & 3 & a+b+1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4a+b+1 \end{array} \right)$$

Luego, obtenemos un sistema lineal en a, b que nos da las condiciones para que el sistema (S) sea compatible

$$\begin{aligned}-2a + b &= -1 \\4a + b &= -1\end{aligned}\tag{S'}$$

Ejemplo (cont.)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego $a = 0$, $b = -1$ y el sistema (S) es equivalente a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\text{Sol} = \{(-2x_2 + x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

Sistemas cuadrados

Teorema

Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Son equivalentes:

- 1 A es invertible;
- 2 el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única (la solución trivial $X = 0$);
- 3 el sistema $AX = Y$ tiene solución única para cada $Y \in \mathbb{F}^{n \times 1}$.

Dem.

(1) \implies (2)

- A invertible \implies existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$
- $AX = 0 \implies X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$

(1) \implies (3)

- $AX = Y \implies X = A^{-1}Y$ (la solución es única)

Dem. (cont.)

(3) \implies (2) Trivial, tomando $Y = 0$

(2) \implies (1)

- Sea R la forma ERF de A
- R es triangular superior
- $AX = 0$ tiene solución única $\implies RX = 0$ tiene solución única $\implies R = I$ (si la última fila de R fuera nula, podemos poner una incógnita en función de las demás)
- Luego A es equivalente por filas a $R = I$
- Luego existen matrices elementales E_1, E_2, \dots, E_k tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

- Por tanto $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$



Muy importante

La demostración del teorema anterior nos da un método eficiente para calcular la inversa de una matriz A tal que $\det A \neq 0$.

- $\det A \neq 0 \implies A$ es equivalente por filas a I
- Si e_1, e_2, \dots, e_k son las OEF que aplicamos a A para llevarla a I , y E_i es la matriz identidad, entonces

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = e_k(\cdots e_2(e_1(I)))$$

- En palabras: **si aplicamos a la matriz identidad las mismas OEF que le aplicamos a A para llegar a I , lo que se obtiene es la matriz inversa A^{-1}**

Ejemplo

Encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Ejemplo (cont.)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Verdadero o Falso: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

es invertible y A^{-1} tiene coeficientes enteros.

Eliminación Gaussiana

Es un método para llevar $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a su forma ERF

- ➊ Ir a la 1ra columna no nula de A . Si el 1er elemento es cero intercambiamos la 1ra fila con alguna fila que tenga un elemento no nulo en esa columna (si no, lo dejamos como está)
- ➋ Obtener ceros debajo de este elemento usando OEF de tipo II
- ➌ Aplicar el mismo procedimiento a la submatriz que se obtiene quitando la 1ra fila y la 1ra columna no nulas
- ➍ Hacer unos en los 1ros elementos no nulos de cada fila no nula usando OEF tipo II y ceros arriba de éstos usando OEF tipo II

Complejidad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 2k(k-1) + \sum_{k=1}^n k &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &\approx \frac{n^3}{3}, \quad n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Observación

- El problema de calcular el determinante de una matriz $n \times n$ tiene una complejidad de $n^3/3$ si usamos eliminación gaussiana para pasar a una matriz triangular superior (hay que recordar qué OEF tipo I y III hicimos porque éstas cambian el determinante)
- Si lo hacemos por definición la complejidad es $n! \gg n^3/3$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 8 \\-3x - y + 2z &= -11 \\-2x + y + 2z &= -3\end{aligned}\tag{S}$$

Usamos eliminación gaussiana:

Ejemplo (cont.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{f}_3 \rightarrow -\text{f}_3]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{f}_2 \rightarrow 2\text{f}_2]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{f}_1 \rightarrow \frac{1}{2}\text{f}_1]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Ejemplo (cont.)

Luego, el sistema tiene solución única $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$

Además, las cuentas que hicimos nos permiten calcular fácilmente el determinante de la matriz A de coeficientes del sistema (S):

- A es equivalente por filas a la matriz identidad I
- Para pasar de A a I usando OEF hicimos
 - OEF Tipo II (no cambian el determinante)
 - 3 OEF Tipo I: $e_1 = "f_1 \rightarrow -f_1"$, $e_2 = "f_2 \rightarrow 2f_2"$,
 $e_3 = "f_3 \rightarrow \frac{1}{2}f_3"$
 - No hicimos OEF Tipo III

Luego

$$1 = \det I = \det(e_3(e_2(e_1(A)))) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \det A$$

y por ende

$$\det A = -1$$

Aplicación a determinantes

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se dice

- **no-singular** si el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única. O sea, $AX = 0 \implies X = 0$
- **singular** si no es no-singular. O sea, existe $0 \neq X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ tal que $AX = 0$

Observación importante

Sigue de los resultados anteriores que

- A no-singular $\iff \det A \neq 0$ (pues ser no-singular es equivalente a ser invertible)
- A singular $\iff \det A = 0$

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado

Teorema

Dadas $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se tiene

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Antes de dar la prueba necesitamos algunos lemas previos

Lema

Sea $E \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriz elemental asociada a una OEF e .

Entonces

- 1 $e = "f_r \rightarrow \alpha f_r" \implies \det E = \alpha, \alpha \neq 0$
- 2 $e = "f_r \rightarrow f_r + \alpha f_s" \implies \det E = 1, r \neq s$
- 3 $e = "f_r \leftrightarrow f_s" \implies \det E = -1, r \neq s$

Dem.

Sigue de las propiedades del determinante, pues $E = e(I)$. □

Lema

Sea E una matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ vale

$$\det(EA) = (\det E)(\det A).$$

Dem.

Por hipótesis $E = e(I)$ para alguna OEF e . Tenemos que analizar tres casos de acuerdo a si e es Tipo I, II o III.

Tipo I

- $e = "f_r \rightarrow \alpha f_r", \alpha \neq 0$
- $\det(EA) = \det(e(A)) = \alpha \det A$ (prop. del determinante)
- $(\det E)(\det A) = \alpha \det A$ (lema previo)
- $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.

Tipo II y III hacerlo como ejercicio. □

Dem. del teorema

Distinguimos dos casos:

A singular.

- Si B es singular entonces existe $X \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} BX = 0 &\implies ABX = 0 \implies AB \text{ es singular} \\ &\implies 0 = \det(AB) = \underbrace{(\det A)(\det B)}_{=0} \end{aligned}$$

- Si B es no singular, entonces B es invertible. Como A es singular, existe $X \neq 0$ tal que $AX = 0 \implies AB(B^{-1}X) = 0$ con $B^{-1}X \neq 0$. Luego AB es singular y por ende $\det(AB) = 0$
- En cualquiera de los dos casos $0 = \det(AB) = (\det A)(\det B)$

Dem. del teorema (cont.)

A no-singular

- $AX = 0 \implies X = 0$
- A es equivalente por filas a la matriz identidad
- Existen matrices elementales E_1, E_2, \dots, E_k tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

- $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ y E_i^{-1} también es una matriz elemental
- Por el Lema, $\det A = (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1})$
- $AB = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$
- Por el Lema

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1})(\det B) \\ &= (\det A)(\det B) \quad \square \end{aligned}$$

Regla de Cramer

Teorema (Cramer)

Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriz invertible. Entonces la (única) solución del sistema $AX = Y$ está dada por

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

donde A_i es la matriz que se obtiene de A reemplazando la i -ésima columna por el vector Y

Dem.

Como A es no-singular, resulta invertible y por ende, $X = A^{-1}Y$. La demostración usa la expresión para A^{-1} en términos de la matriz adjunta.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \quad (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i)$$

Dem. (cont.)

$$\begin{aligned}x_i &= (A^{-1}Y)_i = \frac{1}{\det A} ((\text{adj } A)Y)_{i1} \\&= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n (\text{adj } A)_{ij} y_j \\&= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \underbrace{y_j}_{(A_i)_{ji}} \underbrace{\det A(j|i)}_{A_i(j|i)} \\&= \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (A_i)_{ji} \det A_i(j|i)}_{\det A_i, \text{ desarrollo por la columna } i} \\&= \frac{\det A_i}{\det A} \quad \square\end{aligned}$$

Ejemplo

Resolver el sistema

$$ax + by = u$$

$$cx + dy = v$$

en donde $ad - bc \neq 0$.

Aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = \frac{ud - bv}{ad - bc}$$

$$y = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = \frac{av - uc}{ad - bc}$$