Procesos estocásticos

1. Al final de una línea de fabricación, el producto final está sujeto a un proceso de inspección que determina si el producto es defectuoso o no. Supongamos que la aparición de un artículo defectuoso es independiente de la aparición de otros y que la probabilidad de ocurrencia del mismo es p. Sea el proceso estocástico $\{N_n: n\in\mathbb{N}_0\}$, donde N_n es el número de artículos defectuosos hallados hasta el n-ésimo producto fabricado. Calcule la esperanza y la varianza de dicho proceso.
a) Describa el proceso estocástico $\{N_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ en términos del proceso de Bernoulli.
b) Pruebe que el proceso $\{N_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ es una cadena de Markov.
c) Halle la matriz de transición para esta cadena.
d) Clasifique los estados.

2. En una bifurcación de una ruta, aproximadamente el 38% de los automóviles toma el camino de la derecha, y es posible suponer que cada conductor elige cuál camino tomar independiente-mente de lo que hace el resto. Definimos el proceso estocástico $\{N_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde N_n es el número de automóviles que toman el camino de la izquierda hasta el n-ésimo instante de observación.
a) ¿Cuál es la probabilidad que el quinto automóvil sea el primero en girar a la izquierda?
b) ¿Cuál es la probabilidad que el quinto automóvil sea el segundo en girar a la izquierda?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que 12 automóviles hayan tomado hacia la izquierda hasta el vigésimo instante de observación sabiendo que hasta el duodécimo instante lo hicieron 9?
d) ¿Cuál es el número promedio de automóviles que girarán a la derecha en las primeras 100 observaciones?

3. El ingreso a un centro comercial puede realizarse por dos puertas idénticas, y por razones desconocidas los clientes prefieren la puerta de la izquierda. Haciendo un análisis estadístico se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad que el cliente que ingresa lo haga por la puer-ta de la izquierda es 2/3. Además, se ha concluido que la influencia de posibles congestiones frente a una de las puertas es despreciable pues, debido a las dimensiones de las puertas y al promedio de clientes que ingresan por unidad de tiempo, dichas congestiones son poco fre-cuentes. Por lo tanto, puede suponerse que los clientes eligen la puerta de acceso según su propia preferencia. Se pide hallar la matriz de transición asociada al proceso $\{N_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde N_n es el número de clientes que ingresan al centro comercial por la puerta de la izquierda hasta el instante de arribo del n-ésimo cliente.

Cadenas de Markov

4. En una dada localidad, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información, modelar el clima de la localidad como una cadena de Markov, dibujar el grafo asociado y calcular la matriz de probabilidades de transición de dicha cadena.

5. Sea X una cadena de Markov con espacio de estados E={a,b,c}, matriz de transición $P=\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$

y distribución inicial $\pi=(2/5,1/5,2/5)$. Calcular
a) $P\{X_1=b, X_2=b, X_3=b, X_4=a, X_5=c \mid X_0=a\}$
b) $P\{X_1=b, X_3=a, X_4=c, X_6=b \mid X_0=a\}$
c) $P\{X_2=b, X_5=b, X_6=a\}$

6. Un edificio de dos pisos y planta baja posee un ascensor que llega a todas las plantas. La secuencia de pisos alcanzados hasta el piso en el que finaliza el *n*-ésimo viaje puede modelarse como una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso solo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en planta baja. Se pide
a) calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena
b) dibujar el grafo asociado
c) ¿cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada una de las tres plantas?

7. Un viajante realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios, permanece todo el día en una ciudad viajando a otra ciudad al día siguiente si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4, y la de tener que viajar a A es 0,2. Si el viajante se queda un día en B, con probabilidad 0,2 tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último, si el viajante trabaja todo el día en A, permanecerá en esa ciudad al día siguiente con probabilidad 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.
a) dibujar el grafo asociado
b) Si el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?
c) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el viajante está en cada una de las tres ciudades?

8. Clasifique los estados de las cadenas cuyas matrices de transición se dan a continuación:

$$
\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}
\qquad
\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\qquad
\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

9. Sea *X* una cadena de Markov con espacio de estados *E*= {*r*, *w*, *b*, *y*} y matriz de transición

$$
\mathrm{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}
$$

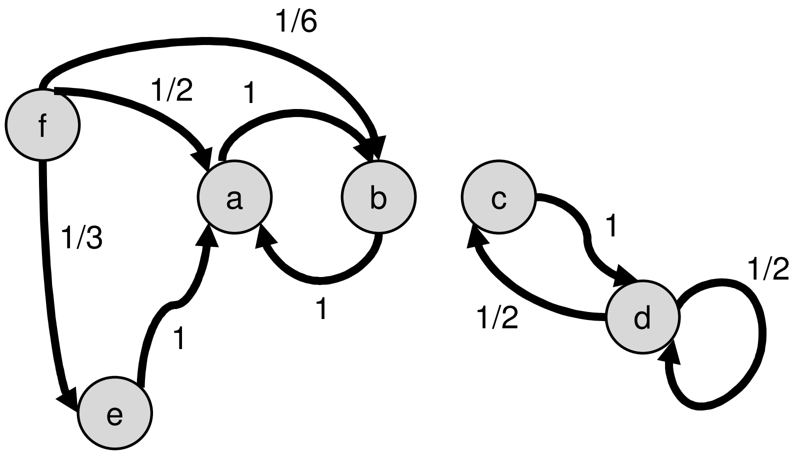
a) Calcular la distribución $\{F_k(w, b) : k= 1,2, \ldots\}$ del tiempo de primer pasada del estado *w* al estado *b* por simple inspección. Ídem para $\{F_k(b, b) : k= 1,2, \ldots\}$
b) Clasificar los estados de la cadena *X*.

10. Sea *X* una cadena de Markov aperiódica e irreducible con *m* estados ($m<\infty$). Suponiendo que su matriz de transición es doblemente markoviana, mostrar que $\pi(i)=\dfrac{1}{m}, i\in E$ es su distribución límite. Recordar que una matriz se denomina doblemente markoviana si las componentes de cada fila y de cada columna suman 1 respectivamente.

11. Calcule la distribución límite para la cadena de Markov cuya matriz de transición es

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

12. El siguiente grafo representa un proceso, cuyo comportamiento puede modelarse a través de una cadena de Markov.



a) Estudie la cadena y sus estados.
b) Calcule, para cada *i*, *j* pertenecientes al espacio de estados *E*, la probabilidad de alcanzar el estado *i* a partir de *j* en algún número finito de pasos.
c) Calcule el número promedio de visitas al estado *j* partiendo del estado *i*.
d) Analice si existe para esta cadena alguna distribución invariante. En caso afirmativo, obtenga una.
e) Analice si existe distribución límite para esta cadena. En caso de existir, hállela
Importante: todos los ítems deben estar justificados teóricamente, utilizando nomenclatura específica.

13. Considere dos apostadores cuyos capitales suman \$7 de manera que, cuando uno de ellos tiene los \$7, el otro llega a la ruina y el juego termina. Suponga que los jugadores apuestan \$1 en cada jugada, que las jugadas son independientes y que se tiene la misma probabilidad de ganar o perder. Sea X_n el capital del primer apostador al final de la *n*-ésima jugada.
a) Mostrar que *X* es una cadena de Markov con espacio de estados *E*={0,…,7} y calcular sus probabilidades de transición.
b) Calcular la probabilidad *F*(*i*, 0) de llegar a la ruina a partir del capital inicial *i* para el primer jugador.

14. Considere las cadenas de Markov asociadas a las siguientes matrices de transición

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada una de ellas
a) estudiar la cadena y sus estados
b) para cada $i, j \in E$ calcular la probabilidad de alcanzar alguna vez el estado *j* desde el estado *i*
c) analizar si existe alguna distribución invariante para esta cadena. En caso afirmativo, presentar una
d) analizar si existe distribución límite para esta cadena. En caso afirmativo, encuéntrela.

15. El Departamento de Relaciones con el Personal de una firma realiza un estudio de niveles de categoría para proveer promociones adecuadas en el momento oportuno, controlar el pago de haberes, analizar necesidades de contratación de personal, etc. Esta empresa tiene 20 empleados de categoría 3 (la más alta), 80 de categoría 2 y 200 de categoría 1 (la más baja de todas). Basándose en datos históricos, se espera que el 35% de los empleados de la categoría 1, el 20% de la 2 y el 5% de la 3 dejen la empresa anualmente por renuncias, despidos, jubilaciones, fallecimientos, etc.

Considerando las siguientes políticas de personal:

- mantener la misma cantidad de empleados (total y por niveles)
- realizar contrataciones solamente en el primer nivel
- dar promociones a los empleados una sola vez por año

el gerente del Departamento encargó al grupo de Investigación Operativa de la empresa:

a) averiguar qué cantidad de gente debería contratarse y qué cantidad deberá promoverse a la categoría inmediata superior para mantener los niveles de empleados estables anualmente.

b) determinar el tiempo de permanencia promedio de un empleado en la compañía (índice de rotación del personal).

c) calcular la probabilidad de que un empleado que recién ingresa a la firma llegue a la máxima categoría.