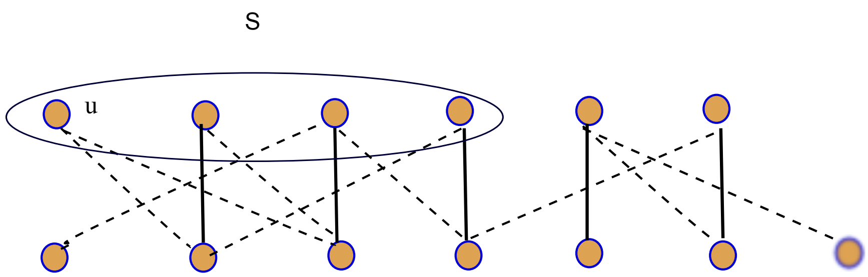
Teorema 1 (Hall (1935))**.** *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito. G tiene un matching que satura X si y sólo si $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subseteq X$.*

Demostración. Recordemos que $N(S) = \{y \in Y : \{x, y\} \in E$ p.a. $x \in S\}$.

Si G tiene un matching que satura X entonces para cualquier S los vértices de Y que están matcheados con ellos están en $N(S)$, y claramente se verifica que $|S| \leq |N(S)|$.

Supongamos ahora que tenemos un matching M máximo que no satura X. Sea u un nodo de X que no está saturado por el matching M.

Entre todos los vértices que pueden ser alcanzados desde u por un camino M-aternante en G, llamamos S a los que están X y T a los que están en Y. (Ver Figura). Notemos que $u \in S$.



Veamos ahora que M matchea T con $S \setminus \{u\}$.

Los caminos M-alternantes desde u alcanzan Y a través de aristas que no están en M y vuelven a X a lo largo de aristas de M. Por lo tanto, todo vértice de $S \setminus \{u\}$ se alcanza por un arco en M desde un vértice en T. Como no hay caminos M-aumentantes, todo vértice de T está saturado. De esta manera, un camino M-alternante que llega a un $y \in T$ se extiende via M a un vértice de S. Por lo tanto, estas aristas de M dan una biyección de T a $S \setminus \{u\}$ y tenemos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.

El matching entre T y $S \setminus \{u\}$ muestra que $T \subseteq N(S)$. En realidad, $T = N(S)$. Supongamos que que existe $y \in Y \setminus T$ que tiene un vecino $v \in S$. La arista $\{v, y\} \notin M$ ya que u no está saturado y el resto de S está matcheado con T por M. Por lo tanto, agregando $\{v, y\}$ al camino M-alternante que llega a v tenemos un camino M-alternante hasta y. Esto contradice el hecho de que $y \notin T$, y concluimos que no puede existir la arista $\{v, y\}$.

De esta manera tenemos que $T = N(S)$ y entonces $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$ para esta elección de S. $\square$