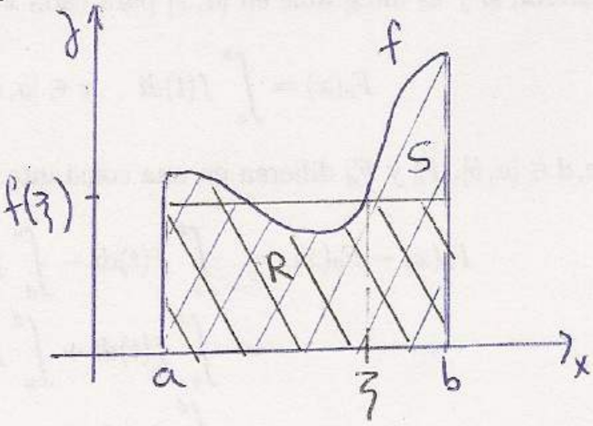
Interpretación geométrica:
$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S)$



Teorema del Valor Medio Ponderado para integrales: Sean f y g continuas en $[a, b]$. Si g no cambia de signo en $[a, b]$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

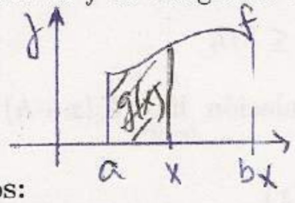
Dem: no la hacemos.

Relación entre integración y derivación.

Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dió cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

La función integral.

Definición: Si f es integrable en $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$, definimos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

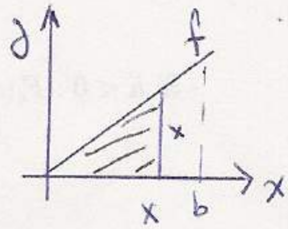


$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ejemplos:

1) $f(x) = x$, con $x \in [0, b]$, f es continua luego integrable

$g(x) = \int_0^x t dt = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{área}} \ \forall x \in [0, b]$.



Observar que $g'(x) = f(x)$, es decir g es primitiva de f.

2) $f(x) = [x]$, con $[0, 3]$, f es seccionalmente continua luego integrable

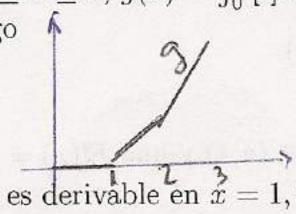
$g(x) = \int_0^x f(t)dt$

Si $0 \leq x < 1$, $g(x) = \int_0^x [t]dt = \int_0^x 0dt = 0$

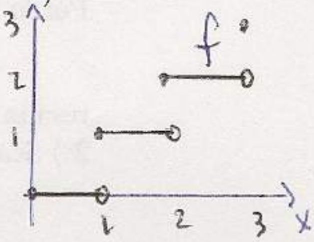
Si $1 \leq x < 2$, $g(x) = \int_0^x [t]dt = \int_0^1 [t]dt + \int_1^x [t]dt = \int_0^1 0dt + \int_1^x 1dt = 0 + 1\,(x-1) = x - 1$

Si $2 \leq x \leq 3$, $g(x) = \int_0^x [t]dt = \int_0^1 0dt + \int_1^2 1dt + \int_2^x 2dt = 0 + 1\,(2-1) + 2(x-2) = 2x - 3$

Luego



$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



g no es derivable en $x = 1, 2, 3$ pero $g'(x) = f(x)$ en $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$.

Definición: En general, si f es integrable en $[a,x]$ para cada $x \in [a,b]$ y $c \in [a,b]$ se puede definir

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \qquad x \in [a,b]$$

Observación: si $c, d \in [a,b]$, F_c y F_d difieren en una constante. En efecto,

$$\begin{aligned} F_c(x) - F_d(x) &= \int_c^x f(t)dt - \int_d^x f(t)dt = \\ &= \int_c^x f(t)dt + \int_x^d f(t)dt = \\ &= \int_c^d f(t)dt \quad \text{constante} \end{aligned}$$

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo): Sea f integrable en $[a,x]$ para cada $x \in [a,b]$ y sea $c \in [a,b]$, definimos

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{para } x \in [a,b]$$

Entonces F_c es continua en $[a,b]$ y además, si f es continua en $x \in (a,b)$, F_c es derivable en x y $F_c'(x) = f(x)$.

Dem: 1º) Veamos que F_c es continua en $[a,b]$ mostrando que si $x \in [a,b]$, $\lim\limits_{h\to 0} F_c(x+h) = F_c(x)$.

$\cdot$ Si $h > 0 : F_c(x+h) - F_c(x) = \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$ ✓

→ Como f es integrable en $[a,b]$, f es acotada en $[a,b]$ y existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces $mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$ luego

(x+h) − x

$$mh \leq F_c(x+h) - F_c(x) \leq Mh$$

y como $\lim\limits_{h\to 0^+} mh = \lim\limits_{h\to 0^+} Mh = 0$, por principio de intercalación $\lim\limits_{h\to 0^+}(F_c(x+h) - F_c(x)) = 0$ es decir

$$\lim_{h\to 0^+} F_c(x+h) = F_c(x)$$

$\cdot$ Si $h < 0 : F_c(x) - F_c(x+h) = \int_{x+h}^x f(t)dt$, con igual argumento, tenemos

x − (x+h)

$$\underbrace{m(-h)}_{\searrow 0} \leq F_c(x) - F_c(x+h) \leq \underbrace{M(-h)}_{\searrow 0}$$

luego $\lim\limits_{h\to 0^-}(F_c(x) - F_c(x+h)) = 0$ entonces

$$\lim_{h\to 0^-} F_c(x+h) = F_c(x)$$

Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} F_c(x+h) = F_c(x)$$

resultando F_c continua en x $\forall x \in [a,b]$.
2º) Sea f continua en (a,b), veamos que existe $F_c'(x)$ $\forall x \in (a,b)$ y que $F_c'(x) = f(x)$.

· Sea $h > 0$ tal que $x + h \in (a, b)$, $\dfrac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \underset{\text{TVMI}}{=} f(d)$ para algún $d \in (x, x+h)$. Ahora estimamos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(d) = \lim_{d \to x^+} f(d) \underset{f \text{ cont en } x}{=} f(x)$$

· Sea $h < 0$ tal que $x + h \in (a, b)$, $\dfrac{F_c(x) - F_c(x+h)}{-h} = \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(t)dt \underset{\text{TVMI}}{=} f(e)$ para algún $e \in (x+h, x)$. Ahora estimamos

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F_c(x) - F_c(x+h)}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} f(e) = \lim_{e \to x^-} f(e) \underset{f \text{ cont en } x}{=} f(x)$$

Por lo tanto existe el límite y

$$F_c'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = f(x)$$

□

Observación: El teorema nos dice, bajo hipótesis de continuidad de f, que

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{es una primitiva de } f$$

Teorema (Segundo teorema fundamental del cálculo): Sea f continua en $[a, b]$ y sea P una primitiva de f en (a, b). Entonces para todo $c \in (a, b)$ vale

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt \quad \text{para todo } x \in (a, b)$$

O bien

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$$

$F_c(x)$

Dem: Sea $g(x) = \int_c^x f(t)dt$, como f continua en (a, b), por el 1° teorema fundamental del cálculo, $g'(x) = f(x)$. Es decir, g es una primitiva de f. Ahora como por hipótesis P es una primitiva de f, es $g(x) - P(x) = k \; \forall x \in (a, b)$. En particular, para $x = c$ se tiene que $g(c) - P(c) = k$ y como $g(c) = 0$, es $k = -P(c)$, por lo tanto

$$F_c(x) = g(x) = P(x) - P(c)$$

entonces

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c) \qquad \forall x \in (a,b)$$

□

Observación: El teorema anterior nos permite calcular integrales definidas, conocida una primitiva de la función integrando y no como límite de sus sumas de Riemann. Más precisamente,

$$\int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

donde P es una primitiva de f.

Regla de Barrow

$$\int_a^b f(t)dt = P(x)\big|_a^b = P(b) - P(a)$$

Ejemplo: $\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$

La función logaritmo definida como una integral. La función exponencial.

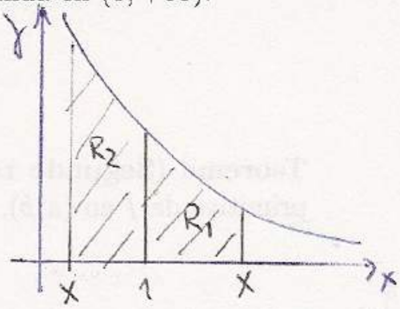
En AMI definimos la función logaritmo como inversa de la función exponencial y a su vez, a ésta, la definimos "intuitivamente" en $\mathbb{R}$, ya que no se definió correctamente a^x con x irracional.
Vamos a definir aquí la función logaritmo como una integral y la función exponencial como la inversa de ésta.

Definición: Se llama *función logaritmo natural de x* y se nota $\ln x$ a la función

$$\begin{array}{rcl} \ln & : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x & \to & \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt \end{array}$$

Observaciones:

1) $\ln x$ está bien definida pues la función inetgrando $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $(0, +\infty)$.



2) Si $x > 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \mathcal{A}(R_1)$

Si $0 < x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\mathcal{A}(R_2)$

Si $x = 1$, $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$

Por lo tanto, $\ln x > 0$ si $x > 1$; $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$ y $\ln 1 = 0$

3) Como $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R}^+$, por 1ºTFC tenemos que $\ln x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ siendo además $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Teorema (Propiedades algebraicas de la función logaritmo natural): Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{Q}$ entonces:

1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2) $\ln(\frac{1}{y}) = -\ln y$

3) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

4) $\ln(x^r) = r \ln x$

Dem: 1) Sea, para y fijo, $h(x) = \ln(xy)$, por regla de la cadena $h'(x) = \dfrac{1}{xy} y = \dfrac{1}{x}$, luego $h(x)$ y $\ln x$ son primitivas de $\dfrac{1}{x}$ y luego difieren en una constante

$$h(x) = \ln x + c \Rightarrow \ln(xy) = \ln x + c$$

Si tomamos $x = 1$, $h(1) = \ln(y) = \ln 1 + c = c$, luego

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$