Unidad 1

El Principio de Inducción Matemática.

Álgebra y Geometría Analítica II (LCC) – Año 2016

1.1. Símbolos sumatoria y productoria.

1.1.1. Sumatoria.

Dados $n, N \in \mathbb{Z}$, con $n \leq N$, el símbolo

$$\sum_{i=n}^{N} a_i,$$

que podemos leer "sumatoria de a_i variando i desde n hasta N", es una forma abreviada de la siguiente suma:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{N-1} + a_N. \tag{1}$$

Σ es la letra griega *sigma* (en mayúscula) y la letra i es el *índice de sumación*. El índice de sumación recorre todos los valores enteros desde n hasta N en la expresión a_i. Consecuentemente, la cantidad de términos de la suma es $N - n + 1$.

Puede utilizarse cualquier letra como índice de sumación, de modo que $\sum_{i=n}^{N} a_i, \sum_{h=n}^{N} a_h$, etc.; son distintos símbolos que representan la misma suma (1).

Ejemplos.

1. $\displaystyle\sum_{i=n}^{n} a_i = a_n$ (suma con un sólo término).

2. $\displaystyle\sum_{i=n}^{N} a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{N-n+1 \text{ términos}} = (N - n + 1)\, a$ (suma de términos constantes e iguales a a).

3. $\displaystyle\sum_{h=-2}^{2} 2^h = 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = \frac{31}{4}$

4. Doble sumatoria:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{1} \left(\sum_{k=1}^{3} 2j - k \right) &= \sum_{j=0}^{1} (2j-1) + (2j-2) + (2j-3) = \sum_{j=0}^{1} 6j - 6 \\ &= (6 \cdot 0 - 6) + (6 \cdot 1 - 6) = -6 \end{aligned}$$

No hay una única forma de expresar una suma mediante el símbolo sumatoria. Así, por ejemplo, la suma $50 + 500 + 5000$ puede expresarse de cualquiera de estas formas (y otras ...)

$$50 + 500 + 5000 = \sum_{i=1}^{3} 5 \cdot 10^i = \sum_{i=0}^{2} 5 \cdot 10^{i+1} = \sum_{i=2}^{4} 5 \cdot 10^{i-1} = \cdots$$

Proposición 1.1 (Propiedades de la sumatoria) *Ver Ejercicios 2.10 a)i) y a)ii), Trabajo Práctico Nro. 1 (1ra. parte).*

Prueba. Hecha en clase. ∎

1.1.2. Productoria.

Dados $n, N \in \mathbb{Z}$, con $n \leq N$, el símbolo

$$\prod_{i=n}^{N} a_i,$$

que podemos leer "productoria de a_i variando i desde n hasta N" (donde Π es la letra griega *pi* mayúscula), es una forma abreviada del siguiente producto (que contiene $N - n + 1$ factores):

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_N. \tag{2}$$

Así, por ejemplo: $\displaystyle\prod_{j=-1}^{2} x - j = (x+1)\, x\, (x-1)\, (x-2) = \cdots = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x.$

Proposición 1.2 (Propiedades de la productoria) *Ver Ejercicio 2.11 del Trabajo Práctico Nro. 1 (1ra. parte).*

Prueba. Se deja como ejercicio para los alumnos. ∎

Símbolo factorial. Dado $n \in \mathbb{N}_0$ se define el símbolo $n!$ – llamado *factorial* de n– así: $0! = 1$, y si $n > 0$ entonces:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, n. \tag{3}$$

Así, por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Simplificación de factoriales. Dado que

$$\begin{aligned} n! = \prod_{i=1}^{n} i \quad &= \quad \left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) \cdot n = (n-1)!n \\ &= \quad \left(\prod_{i=1}^{n-2} i\right) \cdot (n-1)\, n = (n-2)!\, (n-1)\, n, \qquad \text{etc.,} \end{aligned}$$

en ciertas operaciones con factoriales, éstos pueden simplificarse, como por ejemplo en este caso:

$$\frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42.$$

1.2. Inducción matemática.

Empezamos este tema haciendo hincapié en el carácter intrínseco de *sucesión* que tiene el conjunto de los números naturales. Dos de las propiedades características de la sucesión de los números naturales son: la de constituir un conjunto *bien ordenado*, lo cual significa que dicho conjunto tiene un primer elemento (el 1), y la de ser válido en él el *principio de inducción.* Precisaremos a continuación ambos conceptos, así como su interrelación.

Definición 1.1 *Llamaremos* **sección a la derecha de** $\mathbb{Z}$ *a todo subconjunto de* $\mathbb{Z}$ *de la forma* $S_a = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\}$*, con* $a \in \mathbb{Z}$.

Así, por ejemplo, los siguientes conjuntos son secciones a la derecha de $\mathbb{Z}$:

$$S_{-3} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \qquad S_0 = \mathbb{N}_0, \qquad S_1 = \mathbb{N}, \qquad \text{etc.}$$

Principio de buena ordenación (P.B.O.) (o *principio del buen orden*): todo subconjunto no vacío de una sección a la derecha de $\mathbb{Z}$ posee *menor elemento* (o *elemento mínimo*).

Debido a que este principio vale, en particular, para toda sección a la derecha de $\mathbb{Z}$, se dice que S_a es un conjunto *bien ordenado* (para toda $a \in \mathbb{Z}$). Luego, $\mathbb{N}_0$ es un conjunto bien ordenado.

También el *principio de inducción*, que a continuación enunciamos, lo referiremos directamente a $\mathbb{N}_0$ (aunque su enunciado puede adaptarse para cualquier sección a la derecha de $\mathbb{Z}$).

Principio de inducción (P.I.) Vamos a enunciarlo de tres formas distintas, pero que desde un punto de vista lógico puede probarse –aunque no lo haremos– que todas estas formas del P.I. son *equivalentes* entre sí (esto es: cada una de ellas puede deducirse a partir de cualquiera de las otras dos).

Forma I. Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}_0$ tal que:

i) $0 \in S$, y

ii) si $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$.

En tal caso $S = \mathbb{N}_0$.

Forma II. Sea $P(n)$ una afirmación (o proposición) sobre un entero no negativo n tal que:

i) $P(0)$ es cierta, y

ii) si $P(n)$ es cierta entonces también $P(n+1)$ es cierta.

En tal caso $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Forma III. (forma *fuerte* del P.I.) Como la Forma II, pero con:

ii) si $P(m)$ es cierta para todo m tal que $0 \leq m \leq n$, entonces es cierta $P(n+1)$.

Ejemplos.

1. Demostrar que la siguiente afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Hecho en clase utilizando la Forma II del P.I.)

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, la suma de los n primeros números impares es igual a n^2:

$$P(n): \qquad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

(Ej. 2.7 i), Trabajo Práctico Nro. 1 (1ra. parte). Hecho en clase con la Forma II del P.I.)

3. Demostrar que la siguiente afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \qquad \prod_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{n+1}$$

(Ej. 2.17, Trabajo Práctico Nro. 1 (1ra. parte). Hecho en clase con la Forma II del P.I.)

1.3. Razonamientos y demostraciones. Prueba por inducción.

Tanto el P.B.O. como el P.I. son afirmaciones referidas al conjunto $\mathbb{N}_0$ de los números enteros no negativos y ambas son "evidentes por sí mismas": cuando nos detenemos a pensar en lo que enuncian no lo ponemos en duda. De ahí que reciban el nombre de *principios*, porque no se basan en ninguna propiedad "anterior" o "más evidente que ellas", sino que al revés: otras propiedades "menos inmediatas" de los números naturales hacen uso, en su *demostración*, del P.B.O. o del P.I. Asimismo, como veremos a continuación, el P.I. es equivalente al P.B.O.

Proposición 1.3 *P.B.O.* $\Leftrightarrow$ *P.I.*

Prueba. $\Rightarrow$) Veremos que el P.B.O. implica la Forma II del P.I. Para ello, sea $P(n)$ una proposición sobre la cual se verifican las condiciones i) y ii) de la Forma II del P.I. y sea F el conjunto formado por todos los enteros no negativos para los cuales P no es cierta:

$$F = \{t \in \mathbb{N}_0 \mid P(t) \text{ es falsa}\}.$$

Vamos a ver que $F = \emptyset$, con lo cual quedará demostrado lo que afirma el P.I., esto es, que si se cumplen i) y ii) entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

A su vez, para demostrar que $F = \emptyset$ vamos a proceder *por reducción al absurdo*, esto es, supondremos que $F \neq \emptyset$ y veremos que eso nos lleva a un absurdo.[1]

Si $F \neq \emptyset$ entonces por el P.B.O. existe $s \in F$ tal que s es el mínimo de F. Como por i) $P(0)$ es verdadera debe ser $s > 0$. Tenemos así que $s - 1 \in \mathbb{N}_0$, como asimismo que $s - 1 \notin F$, es decir: $P(s-1)$ es verdadera.

Luego, por ii) $P(s)$ es verdadera, lo cual es una contradicción (pues en tal caso debería ser $s \notin F$, pero sabemos que $s \in F$). Como este absurdo provino de suponer que $F \neq \emptyset$, esto no puede ser cierto y por lo tanto $F = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Veremos que la Forma I del P.I. implica el P.B.O. Para ello, sea $A \subseteq \mathbb{N}_0$, $A \neq \emptyset$. Debemos demostrar que A posee un menor elemento. Para ello consideraremos el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{N}_0 : \text{ para todo } a \in A, x \leq a\}.$$

Observemos que para ver que A posee un menor elemento bastará probar que $S \cap A \neq \emptyset$ (¿Por qué?)[2]. Para ello observemos que:

(1) Claramente $0 \in S$ (por definición de S y ser $A \subseteq \mathbb{N}_0$), y se verifica i) en la Forma I del P.I.

[1] Si suponer $F \neq \emptyset$ conduce a un absurdo entonces debe ser $F = \emptyset$.

[2] Aquí, en la Prueba de la Prop. 1.3, veremos que $S \cap A \neq \emptyset$. Se propone a los alumnos mostrar que $S \cap A$ tiene un *único* elemento.

(2) $S \neq \mathbb{N}_0$, pues como $A \neq \emptyset$ existe $a \in A$ y $a+1 \notin S$.

(3) Existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 + 1 \notin S$; pues si no, se verificaría ii) en la Forma I del P.I. y como consecuencia del P.I. –pues se verificarían i) y ii)–, sería $S = \mathbb{N}_0$, contradiciendo (2).
Vamos a ver que $x_0 \in A$ (y según ya hemos expresado, esto completa la prueba).
Como $x_0 + 1 \notin S$ entonces existe $a' \in A$ tal que $x_0 + 1 > a'$, o equivalentemente, tal que $x_0 \geq a'$. Pero como también $x_0 \in S$ es $x_0 \leq a'$. Concluimos así que $a' = x_0 \in A$.

La Proposición está completamente demostrada. ■

1.4. Conjuntos Inductivos.

1.4.1. Cadenas.

En Análisis Matemático se denomina *sucesión de números reales* a toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Frecuentemente también se designan así las *imágenes* $f(1), f(2), \ldots$ de una tal función, sin colocar las típicas “llaves” de conjunto, sino considerando éstas como una *lista* ordenada de números reales, lista que más brevemente se escribe así:

$$a_1, a_2, \ldots.$$

Observemos que se trata de una lista *infinita.* En el caso de una función $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, la misma tiene una *lista finita* de imágenes:

$$f(1), f(2), \ldots, f(n) \qquad \text{o más brevemente} \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

En nuestra materia consideraremos sólo **listas finitas** y no solamente de números reales sino de cualquier tipo de elementos u objetos.

Más precisamente, consideraremos dado un **conjunto no vacío y finito** Σ, llamado *alfabeto* a cuyos elementos llamaremos *caracteres* (o *símbolos*), y funciones

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \Sigma$$

cuyas listas de imágenes dinominaremos “cadenas” sobre Σ. De modo que una cadena sobre Σ será una lista finita de caracteres de Σ.

Así por ejemplo, sea $\Sigma = \{a, b\}$ y sea $f : \{1, 2, 3\} \to \Sigma$ la función tal que $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = a$. Entonces la misma se corresponde con la cadena

$$f(1), f(2), f(3); \qquad \text{es decir:} \qquad a, b, a.$$

En adelante omitiremos las “comas” que separan un carácter de otro en la cadena, para simplemente “yuxtaponer” sus caracteres, es decir, escribiremos la cadena anterior así: *aba*.

Definición 1.2 *Sea Σ un alfabeto.*

1. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma$, llamaremos* **cadena** *sobre Σ (o* **palabra** *o* **secuencia** *sobre Σ), a la simple* **yuxtaposición** *de los caracteres $a_1, a_2, \ldots, a_n$; y la simbolizaremos $a_1 a_2 \cdots a_n$.*

2. *Si p es una cadena sobre Σ de la forma $p = a_1 a_2 \cdots a_n$ con $a_i \in \Sigma$ (para $i = 1, 2, \ldots, n$) y $b \in \Sigma$, llamaremos yuxtaposición de b y p y la simbolizaremos bp, a la cadena*

$$bp := b a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Definición 1.3 (longitud de una cadena) *Si p es una cadena sobre Σ como la dada en el apartado 2 de la Def. 1.2, llamaremos* **longitud** *de p y la simbolizaremos $\|p\|$, al número natural n, esto es: $\|p\| = n$.*

De modo que la longitud de una cadena p sobre Σ, es la cantidad (finita) de caracteres de Σ que se yuxtaponen para formar p.

1.4.2. Potencias de un alfabeto.

Definición 1.4 *Dado un alfabeto* Σ *y* $n \in \mathbb{N}$*, llamaremos* **potencia** n **de** Σ*, y lo simbolizaremos* Σ^n*, al siguiente conjunto (finito) de cadenas sobre* Σ*:*

1. *Si* $n = 1$ *establecemos que* $\Sigma^1 := \Sigma$.

2. *Supuesto definido* Σ^{n-1} *definimos* Σ^n *como el siguiente conjunto:*

$$\Sigma^n := \left\{xp \mid x \in \Sigma, p \in \Sigma^{n-1}\right\}$$

donde xp *es la yuxtaposición del carácter* x *con la cadena* p *(Def. 1.2, apartado 2).*

Veamos, a través del siguiente ejemplo, que Σ^n está constituido por todas las cadenas sobre Σ con n caracteres.

Ejemplo 1.1 *Sea* $\Sigma = \{a, b\}$*. Vamos a utilizar la precedente Def. 1.4 para encontrar los elementos de sus sucesivas potencias* Σ^2, Σ^3*, etc.*

- $n = 2$.
  Como Σ^1 *está definido en el apartado 1 de la Def. 1.4, el apartado 2 nos permite definir* Σ^2 *del siguiente modo:*

$$\Sigma^2 = \left\{xp \mid x \in \Sigma, p \in \Sigma^1\right\} = \{xp \mid x \in \{a, b\}, p \in \{a, b\}\} = \{aa, ab, ba, bb\}.$$

- $n = 3$.
  Como Σ^2 *ya está definido (lo acabamos de obtener en el apartado anterior), el apartado 2 de la Def. 1.4 nos permite definir* Σ^3 *del siguiente modo:*

$$\begin{aligned} \Sigma^3 &= \left\{xp \mid x \in \Sigma, p \in \Sigma^2\right\} = \{xp \mid x \in \{a, b\}, p \in \{aa, ab, ba, bb\}\} \\ &= \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}. \end{aligned}$$

- *Ahora estamos en condiciones de determinar "ordenadamente":* Σ^4*, después* Σ^5, Σ^6*, etc.*

La precedente Def. 1.4 es un ejemplo de *definición por inducción* (o *por recurrencia*).

Los símbolos de sumatoria $\sum_{i=1}^{n} a_i$ y de productoria $\prod_{i=1}^{n} a_i$, que ya hemos definido a través de (1) y (2), respectivamente, también pueden definirse por inducción, como hacemos a continuación.

Definición 1.5 *i) Para* $n = 1$ *definimos:* $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$.

ii) Para $n > 1$ *definimos:* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n$.

Definición 1.6 *i) Para* $n = 1$ *definimos:* $\displaystyle\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$.

ii) Para $n > 1$ *definimos:* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot a_n$.

Se deja como ejercicio para los alumnos, demostrar las Proposiciones 1.1 y 1.2 por inducción, a partir de las Definiciones 1.5 y 1.6, respectivamente.

Definición 1.7 *Para cualquier alfabeto Σ se define la* **cadena vacía** *y se la simboliza λ (letra griega "lambda"). La misma representa una cadena sin caracteres. También definimos: $\Sigma^0 = \{\lambda\}$.*

Nota 1.1 *Hay que tener cuidado de no incluir la letra griega lambda como carácter en ningún alfabeto, ya que ésta está "reservada" para la cadena vacía; y la cadena vacía no puede ser elemento de ningún alfabeto (para todo $\Sigma : \lambda \notin \Sigma$).*

Definición 1.8 *Dado un alfabeto Σ definimos los símbolos Σ^+ y Σ^* del siguiente modo:*

$$\Sigma^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n \qquad y \qquad \Sigma^* := \Sigma^0 \cup \Sigma^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n.$$

Los elementos de Σ^+ son las cadenas con cualquier número (finito) de caracteres de Σ; y los elementos de Σ^* son esas mismas cadenas, pero incluyendo la cadena vacía.

Por definición, ambos conjuntos Σ^+ y Σ^*, son infinitos.

Se define la longitud de la cadena vacía como igual a cero ($\|\lambda\| = 0$). Este hecho, junto con la Def. 1.3 –que define la longitud de cualquier cadena $p \in \Sigma^+$–, hace que esté definida la longitud de cualquier cadena $p \in \Sigma^*$.

Definición 1.9 (igualdad de cadenas) *Dadas $p, q \in \Sigma^+$ de la forma $p = a_1 a_2 \cdots a_n$ con $a_i \in \Sigma$ (para $i = 1, 2, \ldots, n$) y $q = b_1 b_2 \cdots b_m$ con $b_i \in \Sigma$ (para $i = 1, 2, \ldots, m$), diremos que p y q son iguales, y simbolizaremos $p = q$, si:*

$$m = n \qquad y \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, m : a_i = b_i.$$

Definición 1.10 (concatenación de cadenas) *Vamos a definir una operación entre las cadenas de Σ^*, que llamaremos* **concatenación***, del siguiente modo:*

- *Dadas $p, q \in \Sigma^+$ como en la Def. 1.9, llamaremos concatenación de p y q, y la simbolizaremos pq, a la cadena*
$$pq := a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m;$$
- *la concatenación de p y λ es $p\lambda := p$;*
- *la concatenación de λ y p es $\lambda p := p$;*
- *la concatenación de λ y λ es $\lambda\lambda := \lambda$.*

Definición 1.11 (prefijo y sufijo) *Dadas $p, q \in \Sigma^*$ sea $r = pq$. En tal caso:*

- *diremos que p es un* **prefijo** *de r, y que es un prefijo propio si $q \neq \lambda$; y*
- *diremos que q es un* **sufijo** *de r, y que es un sufijo propio si $p \neq \lambda$.*

Ejemplo 1.2 *Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $r = abbcc$. Entonces:*

- *cualesquiera de las cadenas*

$$\lambda, \quad a, \quad ab, \quad abb, \quad abbc \quad y \quad abbcc$$

son prefijos de r, siendo todos –excepto el último–, prefijos propios; y

- *cualesquiera de las cadenas*

$$\lambda, \quad c, \quad cc, \quad bcc, \quad bbcc \quad y \quad abbcc$$

son sufijos de r*, siendo todos –excepto el último–, sufijos propios.*

Queda claro que toda cadena es prefijo y sufijo de sí misma (la propia cadena es la única con tal propiedad), pero nunca prefijo propio o sufijo propio de sí misma.

Definición 1.12 (subcadena) *Si* $r, s, t \in \Sigma^*$ *y* $p = rst$*, entonces diremos que* s *es una* **subcadena** *de* p*. Si* $r \neq \lambda$ *o* $t \neq \lambda$ *entonces* s *es una subcadena* **propia** *de* p*.*

1.4.3. Conjuntos inductivos.

Recordemos las dos maneras clásicas de definir un conjunto: por *extensión* (esto es: exhibiendo cada uno de sus elementos) y por *comprensión* (dando una propiedad que caracteriza unívocamente sus elementos). Así por ejemplo, el siguiente conjunto está dado por extensión en el primer miembro de la igualdad y por comprensión en el segundo:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es un número primo menor que } 15\}.$$

Como veremos a continuación, un conjunto también puede definirse dando ciertos elementos *base* (también llamados *semillas* o *gérmenes* del conjunto), junto con una o más *cláusulas* (o *leyes* o *reglas*) que nos permitan generar todos sus demás elementos, a partir de los que ya posee.

Cuando un conjunto es el "menor" que puede obtenerse de ese modo (es decir: es el menor conjunto que contiene los elementos base y en el cual se verifican las cláusulas establecidas), se dice que el mismo es un *conjunto inductivo* (o también, que está definido *por inducción* o *inductivamente*).

Formalizamos esta idea en la siguiente definición.

Definición 1.13 *Un conjunto* S *es un* **conjunto inductivo** *si:*

1. *S contiene un conjunto finito de "elementos base".*

2. *Hay establecidas "cláusulas" que generan un número finito de nuevos elementos de S a partir de los elementos de S. Las cláusulas son de la forma:*

   "A partir de los elementos $p_1, p_2, \ldots, p_m \in S$
   resultan los nuevos elementos $q_1, q_2, \ldots, q_n \in S$."

   O más brevemente, tienen la forma:

   "Si $p_1, p_2, \ldots, p_m \in S$ entonces $q_1, q_2, \ldots, q_n \in S$."

   Y en general, las simbolizaremos así:

$$p_1, p_2, \ldots, p_m \in S \quad \Rightarrow \quad q_1, q_2, \ldots, q_n \in S. \tag{4}$$

3. *S no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen los apartados 1 y 2 anteriores.*

Veamos a continuación algunos ejemplos de conjuntos inductivos.

Ejemplo 1.3 *Sea* $\Sigma = \{a, b\}$. *Veamos que* Σ^+ *es un conjunto inductivo. En efecto, pues podemos definirlo así:*

1. $a \in \Sigma^+, b \in \Sigma^+$. *(elementos base)*
2. $p \in \Sigma^+ \quad \Rightarrow \quad ap \in \Sigma^+$ *y* $bp \in \Sigma^+$. *(cláusulas)*
3. Σ^+ *no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

En este caso se tiene directamente:

$$\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}.$$

(recordemos que, hasta ahora, Σ^+ estaba dado por las Def. 1.4 y 1.8 y el Ejemplo 1.1.)

Se deja como ejercicio para los alumnos comprobar que se obtiene el mismo conjunto Σ^+ si cambiamos las cláusulas 2 del Ejemplo 1.3, por estas otras:

2'. $p \in \Sigma^+ \quad \Rightarrow \quad pa \in \Sigma^+$ y $pb \in \Sigma^+$.

De modo que un *mismo* conjunto inductivo puede obtenerse, eventualmente, a partir de diferentes cláusulas y/o elementos base.

Ejemplo 1.4 *Dado un conjunto finito* Σ, *veamos que* Σ^* *es un conjunto inductivo. En efecto:*

1. $\lambda \in \Sigma^*$. *(elemento base)*
2. $p \in \Sigma^* \quad \Rightarrow \quad$ *para todo* $x \in \Sigma$, $xp \in \Sigma^*$. *(cláusulas)*
3. Σ^* *no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

Verificar que si $\Sigma = \{a, b\}$, *por ejemplo, resulta:*

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}.$$

Se deja como ejercicio para los alumnos comprobar que aquí también se obtiene el mismo conjunto Σ^* si cambiamos la cláusula 2 del Ejemplo 1.4, por esta otra:

2'. $p \in \Sigma^* \quad \Rightarrow \quad$ para todo $x \in \Sigma, px \in \Sigma^*$.

Ejemplo 1.5 *Cualquier sección a la derecha de* $\mathbb{Z}$ *(Def. 1.1) es un conjunto inductivo. En efecto, fijado* $a \in \mathbb{Z}$ *podemos definir inductivamente* $S_a = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\}$ *así:*

1. $a \in S_a$. *(elemento base)*
2. $x \in S_a \quad \Rightarrow \quad x + 1 \in S_a$. *(cláusula)*
3. S_a *no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

Observemos que en el Ejemplo 1.5, el motivo por el cual S_a no es, por ejemplo, el conjunto de todos los números reales ($S_a \neq \mathbb{R}$), o el conjunto de todos los números racionales ($S_a \neq \mathbb{Q}$), es que $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$ no cumplen el apartado 3. Sin embargo, tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ verifican los apartados 1 y 2, pues fijado $a \in \mathbb{Z}$: es cierto que $a \in \mathbb{R}$ (apartado 1), como asimismo es cierto que "$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{R}$" (apartado 2). Y lo mismo vale si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$.

Subconjuntos de conjuntos inductivos. También pueden definirse inductivamente ciertos subconjuntos de conjuntos inductivos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.6 *Podemos definir inductivamente el conjunto* $M_7 = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$ *de los múltiplos no negativos de* 7 *(que es un subconjunto del conjunto inductivo* $S_0 := \mathbb{N}_0$*). Para ello, sea* S *el conjunto inductivo definido así:*

1. $0 \in S$. *(elemento base)*
2. $n \in S \quad \Rightarrow \quad n + 7 \in S$. *(cláusula)*
3. S *no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

Se ve claramente que $S = M_7$*; de modo que* M_7 *es, efectivamente, un conjunto inductivo.*

También en este caso, el motivo por el cual

$$S \neq \{0, \mathbf{1}, 7, \mathbf{8}, 14, \mathbf{15}, 21, \mathbf{22}, \ldots\} \qquad \text{(por ejemplo)}$$

es que $\{0, \mathbf{1}, 7, \mathbf{8}, 14, \mathbf{15}, 21, \mathbf{22}, \ldots\}$ no cumple el apartado 3 del Ejemplo 1.6 (a pesar que este último conjunto verifica los apartados 1 y 2, como puede comprobarse fácilmente).

Digamos, por último, que no todo subconjunto de un conjunto inductivo puede definirse inductivamente. Para comprobarlo, proponemos a los alumnos que intenten, por ejemplo, definir por inducción el conjunto de los números primos positivos (que, como M_7, también es un subconjunto de $\mathbb{N}_0$). ¿Podrán lograrlo?

Lenguajes. Recibe el nombre genérico de *lenguaje* cualquier subconjunto del conjunto inductivo Σ^* del Ejemplo 1.4. La siguiente definición precisa este concepto.

Definición 1.14 *Dado un alfabeto* Σ*, llamaremos* **lenguaje sobre** Σ*, a cualquier subconjunto* L *de* Σ^* *(incluyendo al conjunto vacío* $\emptyset$*, que se denomina lenguaje vacío). Simbólicamente:* L *es un lenguaje sobre* Σ *si* $L \subseteq \Sigma^*$.

Así, por ejemplo, dado cualquier alfabeto Σ, para todo $n \in \mathbb{N}, \Sigma^n$ resulta ser un lenguaje sobre Σ –el lenguaje de las cadenas de longitud n–.

Una interpretación posible para un lenguaje aparece al considerar el alfabeto habitual $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\}$. Muchas cadenas sobre él representan palabras en nuestro idioma (por ejemplo: *mapa*), pero muchas no (por ejemplo: *qxio*). Sin embargo, ambas son elementos de Σ^*. Las palabras "con sentido" constituyen un subconjunto (propio) L de Σ^*, es decir un *lenguaje* (tanto en el sentido habitual como en el sentido de la Def. 1.14).

Por otro lado, si $\Sigma = \{Juan, Manuel, habla, corre, bien, rápido\}$, muchas cadenas representan frases con sentido (por ejemplo: *Juan habla*, o *Manuel corre rápido*, etc. –observemos que aquí conviene dejar un espacio entre los caracteres de la cadena u oración–) pero también pueden formarse otras sin sentido (*Juan lento bien Manuel*). Nuevamente, ambas son elementos de Σ^* y las oraciones que tienen algún sentido forman un subconjunto (propio) L de Σ^*. Aquí tendríamos un lenguaje de acuerdo con la Def. 1.14, pero no en el sentido habitual (en este caso L sería un tipo de "gramática").

Veamos a continuación algunos ejemplos de lenguajes sobre alfabetos Σ genéricos y que están definidos inductivamente.

En los siguientes Ejemplos 1.7, 1.8 y 1.9, se considera el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Ejemplo 1.7 *Definimos inductivamente el lenguaje* $L_1 \subseteq \Sigma^*$ *así:*

1. $a \in L_1$. *(elemento base)*

2. $p \in L_1 \quad \Rightarrow \quad bpb \in L_1$. *(cláusula)*

3. *L_1 no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

Podemos ver que las "primeras" palabras de L_1 son: $L_1 = \{a, bab, bbabb, \ldots\}$.

Ejemplo 1.8 *Definimos otro lenguaje $L_2 \subseteq \Sigma^*$ así:*

1. $b \in L_2$. *(elemento base)*

2. $p \in L_2 \quad \Rightarrow \quad apb \in L_2$. *(cláusulas)*

3. *L_2 no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

Las "primeras" palabras de L_2 son: $L_2 = \{b, abb, aabbb, \ldots\}$.

Ejemplo 1.9 *Definimos $L_3 \subseteq \Sigma^*$:*

1. $a \in L_3, b \in L_3$. *(elementos base)*

2. $p \in L_3 \quad \Rightarrow \quad ap \in L_3$ *y* $pb \in L_3$. *(cláusulas)*

3. *L_3 no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2.*

Las "primeras" palabras de L_3 son: $L_3 = \{a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, aab, abb, bbb, \ldots\}$.

1.4.4. Principio de inducción primitiva.

Inmediatamente se presenta la siguiente cuestión: dado $x \in X$ y un subconjunto inductivo $Y \subseteq X$, ¿cómo podemos determinar si x es o no elemento de Y?

Por ejemplo, dada una cadena $x \in \Sigma^*$ y un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, definido inductivamente, ¿cómo podemos determinar si x pertenece o no a L?

- **Pertenencia.** En general, si es cierto que $x \in Y$, para probarlo sería suficiente con mostrar la secuencia de formación de x; es decir, sería suficiente mostrar cómo se aplican las cláusulas que definen a Y para llegar a construir x.

  Es así que en el Ejemplo 1.7 podemos justificar que $x = bbabb \in L_1$ del siguiente modo: $a \in L_1$ por el apartado 1 (elemento base); $bab \in L_1$ por el apartado 2 aplicado a $p = a$; y finalmente $bbabb \in L_1$ por el apartado 2 aplicado a $p = bab$.

- **No pertenencia.** ¿Cómo probar que un elemento **no** pertenece a un conjunto inductivo?

  Podemos proceder de varias formas equivalentes, a saber:

  - mostrando que no existe una secuencia de formación para el elemento;
  - mostrando que si se quita el elemento del conjunto, se siguen cumpliendo las cláusulas;
  - probando *propiedades* del conjunto que sirvan para excluir el elemento (condiciones necesarias que no cumple el elemento en cuestión).

  A continuación, ejemplificamos estas distintas formas de demostración.

- Supongamos que deseamos mostrar que $ba \notin L_3$ (Ejemplo 1.9). Para ello, vamos a ver que no existe una secuencia de formación para la cadena ba. En efecto: en L_3 las únicas cadenas de longitud 1 son los elementos base (los caracteres a y b), pues las cláusulas del apartado 2 aplicadas a los elementos base generan cadenas de longitud 2, que son: aa, ab y bb. Además, éstas son las únicas cadenas de longitud 2, ya que las cláusulas del apartado 2 aplicadas a estas (nuevas) cadenas generan cadenas de longitud 3. Como ba es una cadena de longitud 2 y no se encuentra entre todas las cadenas de longitud 2 de L_3 podemos asegurar que $ba \notin L_3$, como queríamos ver.
- Como vimos al presentar el Ejemplo 1.6, el motivo por el que 8 no pertenece al conjunto inductivo M_7 definido en dicho Ejemplo, es que si lo quitáramos, los apartados 1 y 2 se seguirían cumpliendo (y como por el apartado 3, M_7 no contiene ningún subconjunto propio cuyos elementos verifiquen 1 y 2; sería absurdo que pudiéramos quitarle algún elemento y el apartado 3 se siga cumpliendo).
- Nos proponemos ahora justificar que $bbaa \notin L_2$ (Ejemplo 1.8). En este caso consideraremos alguna propiedad que satisfagan los elementos de L_2 y de la cual no goza la cadena $bbaa$. Lo haremos mencionando dos de tales propiedades (aunque en la práctica, alcanzaría con tener en cuenta una sola). Nos referimos a las siguientes propiedades:
    - **P1.** Todas las cadenas de L_2 tienen longitud impar.
    - **P2.** Excepto b, las restantes cadenas de L_2 tienen el carácter a como prefijo.

  Si aceptamos que ambas propiedades son realmente ciertas (lo cual parece plausible), vemos que la cadena $bbaa$ no satisface ninguna de ellas y en consecuencia no puede estar entre las cadenas de L_2. (Repetimos: no satisfacer una sola de estas propiedades, ya sería justificación suficiente para afirmar que $bbaa \notin L_2$).

Ahora bien, ¿hemos probado que las dos propiedades enunciadas (**P1** y **P2**) son satisfechas por todas las cadenas de L_2?

No. Dijimos que su veracidad parecía plausible, pero realmente no las "probamos".

Surge entonces una cuestión más, ¿cómo podemos probar si determinada afirmación, referida a los elementos de un conjunto inductivo Y, es cierta para todos los elementos de Y?

La respuesta es: así como probar "que una afirmación referida a los números naturales es cierta para todos los naturales" puede hacerse por medio del *principio de inducción matemática* (Sección 1.2); análogamente, "que una afirmación referida a los elementos de un conjunto inductivo Y es cierta para todos los elementos de Y" puede probarse por medio del *principio de inducción primitiva (P.I.P.)*.

Este principio consta, al igual que el principio de inducción matemática, de dos pasos. Llamando, como en (4), $p_1, p_2, \ldots$ a los elementos "anteriores" de Y y $q_1, q_2, \ldots$ a los elementos "nuevos" de Y (es decir, a los generados por las "cláusulas" que definen a Y), podríamos expresar el P.I.P. así:

Principio de Inducción Primitiva (P.I.P.) Sea **P** una afirmación referida a los elementos de un conjunto inductivo Y, tal que:

i) **P** es cierta para los elementos base de Y.

ii) Suponiendo que **P** es cierta para los elementos "anteriores" de Y (es decir: $p_1, p_2, \ldots$) puede probarse que entonces la propiedad **P** es cierta para los elementos "nuevos" de Y (es decir: $q_1, q_2, \ldots$).

En tal caso **P** es cierta para todo $y \in Y$.

En el caso de las propiedades **P1** y **P2**, el conjunto inductivo en consideración es el lenguaje L_2 (el del Ejemplo 1.8), y a continuación enunciamos el principio de inducción primitiva adaptado para este lenguaje.

P.I.P. para L_2. Si $P(w)$ es una afirmación (o proposición) referida a una cadena w, y:

i) $P(w)$ es cierta cuando $w = b$ (el elemento base en la definición inductva de L_2), y

ii) si $P(w)$ es cierta para $w \in L_2$ entonces $P(awb)$ también es cierta;

entonces $P(w)$ es cierta para toda $w \in L_2$.

Esto último (es decir, que "$P(w)$ es cierta para toda $w \in L_2$") es lo que asegura el P.I.P. para L_2, en relación a una proposición $P(w)$ –una vez verificado que se cumplen i) y ii)–.

P1. Ahora vamos a aplicar el P.I.P. para probar **P1**, que enunciamos así:

$$P_1(w): \qquad \text{si } w \in L_2 \text{ , entonces } \|w\| \text{ es impar.}$$

i) $P_1(w)$ es cierta cuando $w = b$, ya que en este caso: $\|w\| = \|b\| = 1$, y 1 es impar.

ii) Supongamos ahora que $P_1(w)$ es cierta si $w \in L_2$, esto es supongamos que $\|w\|$ es impar. Entonces $P_1(awb)$ también es cierta, ya que

$$\|awb\| = \|a\| + \|w\| + \|b\| = 1 + \|w\| + 1 = \|w\| + 2$$

y la suma de un número impar más 2 es impar.

P2. Vamos a aplicar el P.I.P. para probar la propiedad **P2**, que podemos expresar así:

$$P_2(w): \qquad \text{si } w \in L_2 \text{ y } w \neq b \text{ , entonces } a \text{ es prefijo de } w.$$

Como la veracidad de $P_2(w)$ excluye el caso $w = b$, en realidad tenemos que probar que $P_2(w)$ es cierta para toda $w \in L_2 \setminus \{b\}$.[3]

Pero entonces tenemos que, primero definir inductivamente $L_2' := L_2 \setminus \{b\}$ y luego aplicar el P.I.P. adaptado a L_2' para probar que esta proposición

$$P_2'(w): \qquad \text{si } w \in L_2' \text{ entonces } a \text{ es prefijo de } w$$

es cierta para toda $w \in L_2'$.

A continuación llevamos a cabo todo lo dicho.

1ro) Definimos inductivamente L_2'.

1. $abb \in L_2'$. (elemento base)
2. $p \in L_2' \quad \Rightarrow \quad apb \in L_2'$. (cláusula)
3. L_2' es el menor conjunto que contiene los elementos obtenidos a partir de 1 y 2.

Las "primeras" palabras de L_2' son

$$L_2' = \{abb, aabbb, aaabbbb, \ldots\}$$

2do) Enunciamos el P.I.P. para L_2'.

[3] La diferencia de conjuntos $L_2 \setminus \{b\}$ representa el conjunto de todos los elementos de L_2 que no están en $\{b\}$.

i) $P'(w)$ es cierta cuando $w = abb$ (el elemento base en la definición inductva de L_2'), y

ii) si $P'(w)$ es cierta para $w \in L_2'$ entonces $P'(awb)$ también es cierta.

3ro) Lo aplicamos para probar que $P_2'(w)$ es cierta para toda $w \in L_2'$.

i) $P_2'(w)$ es cierta cuando $w = abb$, ya que a es prefijo de abb. (Def. 1.11)

ii) Supongamos ahora que $P_2'(w)$ es cierta si $w \in L_2'$, esto es supongamos que a es prefijo de w. Veamos que $P_2'(awb)$ es cierta. De acuerdo con el primer apartado de la Def. 1.11, claramente a es prefijo de awb, resultando así que $P_2'(awb)$ es cierta.

Índice