FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALGEBRA Y GEOMETRÍA I

Geometría Lineal del Espacio

La Recta en el espacio

Problemas de Rectas y Planos

Ricardo Sagristá

LA RECTA EN EL ESPACIO

1- la recta en el espacio como lugar geométrico

Sea en el espacio un punto fijo P_1 y un vector $\vec{u}$

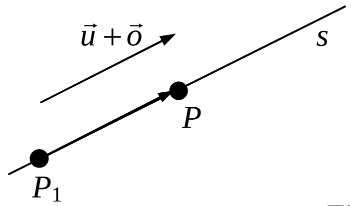


Fig.1

El lugar geométrico:

$$r = \left\{ P \ / \ \overrightarrow{P_1P} = t\ \vec{u};\ t \in R \right\} \ (1)$$

es la recta que pasa por P_1 y tiene la misma dirección que el vector $\vec{u}$

Hemos descrito la recta r) del espacio, como el lugar geométrico de los puntos P; que son extremos de los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ colineales con $\vec{u}$, es decir $\overrightarrow{P_1P} = t\ \vec{u}$. El punto P (móvil) describe la recta, cuando t recorre el conjunto R de números recales.

2- Ecuación vectorial de la recta en el espacio.

Vamos a introducir ahora, un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con la base canónica asociada.

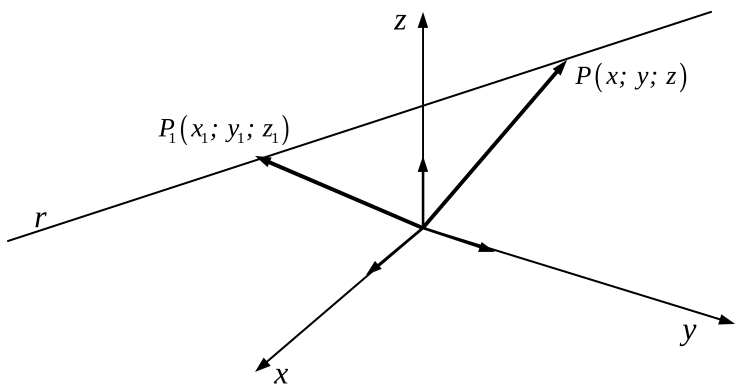


Fig.2

Sea el punto fijo $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ por el que pasa la recta.

El vector $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ que da la dirección de la recta es obviamente no nulo, entonces será $|\vec{u}| \neq 0$

El lugar geométrico (1) lo podemos escribir así:

$$r = \left\{ P(x;\ y;\ z)\ /\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\ \vec{u};\ t \in R \right\}$$

La ecuación:

$$(2) \qquad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\ \vec{u}$$

es la **ecuación vectorial** de la recta *r*

Todo punto $P \in r$, la verifica. Recíprocamente, todo punto *P* del espacio que la verifica pertenece a la recta.

Si el punto de paso de la recta es el origen de coordenadas, es decir $P_1 \equiv 0$ será $\overrightarrow{OP_1} = \vec{0}$ y la ecuación vectorial (2), es para este caso particular:

$$(3) \qquad \overrightarrow{OP} = t\ \vec{u}$$

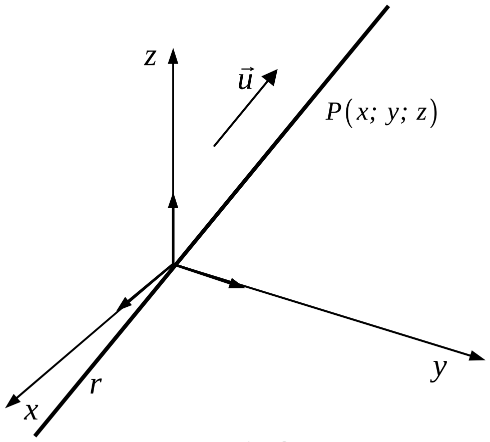


Fig.3

2-1- Ecuación paramétricas. Coeficientes y cosenos directores. Significado del parámetro *t*.

Si en la ecuación vectorial (2) trabajamos con las componentes de los vectores que en ella figuran, es decir

$$\overrightarrow{OP} = (x;\ y;\ z)$$
$$\overrightarrow{OP_1} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$$
$$\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$$

tendremos

$$(x\ ; y;\ z) = (x_1;\ y_1;\ z_1) + t\,(u_1;\ u_2; u_3)$$

y operando como hicimos para la recta en el plano llegamos a:

$$(x\ ; y;\ z) = (x_1 + tu_1;\ y_1 + tu_2;\ z_1 + tu_3)$$

es decir

$$r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \qquad (4)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta , cuyo punto de paso es $P_1\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ y cuya dirección es la del vector $\vec{u} = \left(u_1;\ u_2;\ u_3\right)$.
Estas componentes se llaman **coeficientes directores** de *r*.
Si $|\vec{u}| = 1$ (versor), entonces, dichas componentes se llaman **cosenos directores** de la recta (por los motivos ya conocidos)
En cuanto al significado geométrico del parámetro $t \in R$, tomando la ecuación vectorial (2) tenemos:

$$t\,\vec{u} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P} \qquad \text{(ver Fig. 2)}$$

es decir

$$|t|\,|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{P_1P}\right| \Leftrightarrow |t| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P}\right|}{|\vec{u}|}; \quad |\vec{u}| \neq 0$$

Se llega al mismo resultado que para la recta en el plano. Es decir $|t|$ es proporcional a la distancia entre la posición del punto $P\left(x;\ y;\ z\right)$ que describe la recta. Para ese valor de *t* y el punto $P_1\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ de paso.
Si $|\vec{u}| = 1$, entonces $|t|$ es exactamente dicha distancia.
Si la recta pasa por el origen es decir $x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ z_1 = 0$ entonces las ecuaciones (4) quedan:

$$r)\begin{cases} x = u_1 t \\ y = u_2 t \\ z = u_3 t \end{cases} \quad (5)$$

que son la ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el origen. Todo lo dicho para el caso general, vale para este caso.
En particular será :

$$|t| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P}\right|}{|\vec{u}|}$$

2-2- Forma canónica (o simétrica) de la ecuación de la recta en el espacio. Planos proyectantes. Proyecciones ortogonales de la recta.

Si en las ecuaciones paramétricas de *r*)

$$r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

es $u_1 \neq 0;\ u_2 \neq 0;\ u_3 \neq 0$ se puede escribir:

$$r)\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1}=t \\ \dfrac{y-y_1}{u_2}=t \\ \dfrac{z-z_1}{u_3}=t \end{cases}$$

que a su vez es equivalente al sistema (eliminando *t*)

$$r)\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{y-y_1}{u_2} \\ \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \\ \dfrac{y-y_1}{u_2}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \end{cases}$$

el cual es equivalente a cualquiera de los siguientes sistemas:

$$r)\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{y-y_1}{u_2} \\ \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \end{cases} \quad ; \qquad r)\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{y-y_1}{u_2} \\ \dfrac{y-y_1}{u_2}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \end{cases} \quad ; \qquad r)\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \\ \dfrac{y-y_1}{u_2}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \end{cases} \quad (6)$$

Por brevedad los sistemas (6) se suelen escribir así:

$$r)\ \frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3} \quad (7)$$

que es llamada **forma canónica o simétrica** de la ecuación de la recta en el espacio que pasa por $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y tiene la dirección de $\vec{u}=(u_1;\ u_2;\ u_3)$.
No debe olvidarse que (7) no es una ecuación sino uno cualquiera de los tres sistemas (6).
Entonces nuestra recta *r*) puede pensarse como el siguiente conjunto:

$$r=\left\{P(x;y;z)\,/\,\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}\wedge\ \frac{x-x_1}{u_1}=\frac{z-z_1}{u_3}\right\}$$

es decir

$$r=\left\{P(x;y;z)\,/\,\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}\right\}\cap\left\{P(x;y;z)\,/\,\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{z-z_1}{u_3}\right\}$$

ahora bien la ecuación:

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

se puede escribir:

$$u_2x-u_1y+\left(-u_2x_1+u_1y_1\right)=0$$

ecuación que se puede presentar así, haciendo $a=u_2;\;\; b=-u_1;\; \left(-u_2x_1+u_1y_1\right)=d$

$$ax+by+d=0;\;\forall z$$

es decir es la ecuación de un plano proyectante sobre el plano coordenado *XY*.

En forma análoga la ecuación

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{z-z_1}{u_3}$$

es la de un plano proyectante sobre el coordenado *XZ*:

$$u_3x-u_1z+\left(-u_3x_1+u_1z_1\right)=0$$

Resumiendo: la recta *r*) puede darse como intersección de dos planos proyectantes sobre los planos coordenados, en este caso *XY* y *XZ*.

Trabajando en forma similar con los sistemas restantes en (6) se puede mostrar que la misma recta *r*) puede darse como intersección de pares de planos proyectantes sobre los planos *XY* e *YZ* y *XZ* e *YZ* respectivamente.

Llamamos **proyección (ortogonal) de la recta *r*)** sobre cada uno de los planos coordenados, a las trazas de los planos proyectantes que la determinan, con cada uno de los respectivos planos coordenados.
Es decir, si llamamos con *r'*) a la proyección de *r*) sobre el coordenado *XY*, será:

$$r'=\left\{P\left(x;y;z\right)/\,\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2};\;\forall z\right\}\cap\left\{P\left(x;y;z\right)/\,z=0;\,\forall x;\,\forall y\right\}$$

entonces tendremos:

$$\pi_1)\;\; u_2x-u_1y+\left(-u_2x_1+u_1y_1\right)=0;\;\;\forall z$$

es decir

$$ax+by+d=0;\;\forall z$$

la ecuación del plano proyectante de *r*) sobre el plano coordenado *XY*. Mientras que la proyección de *r*) sobre dicho plano coordenado, tendrá por ecuación:

$$r')\;\; ax+by+d=0;\;\forall z$$

que es la ecuación de una recta contenida en el plano coordenado *XY*.

En forma análoga se tendrá, si con *r''*) llamamos la proyección de r) sobre el plano coordenado *XZ*.

$$r''=\left\{P\left(x;y;z\right)/\,\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{z-z_1}{u_3};\;\forall y\right\}\cap\left\{P\left(x;y;z\right)/\,y=0;\,\forall x;\,\forall z\right\}$$

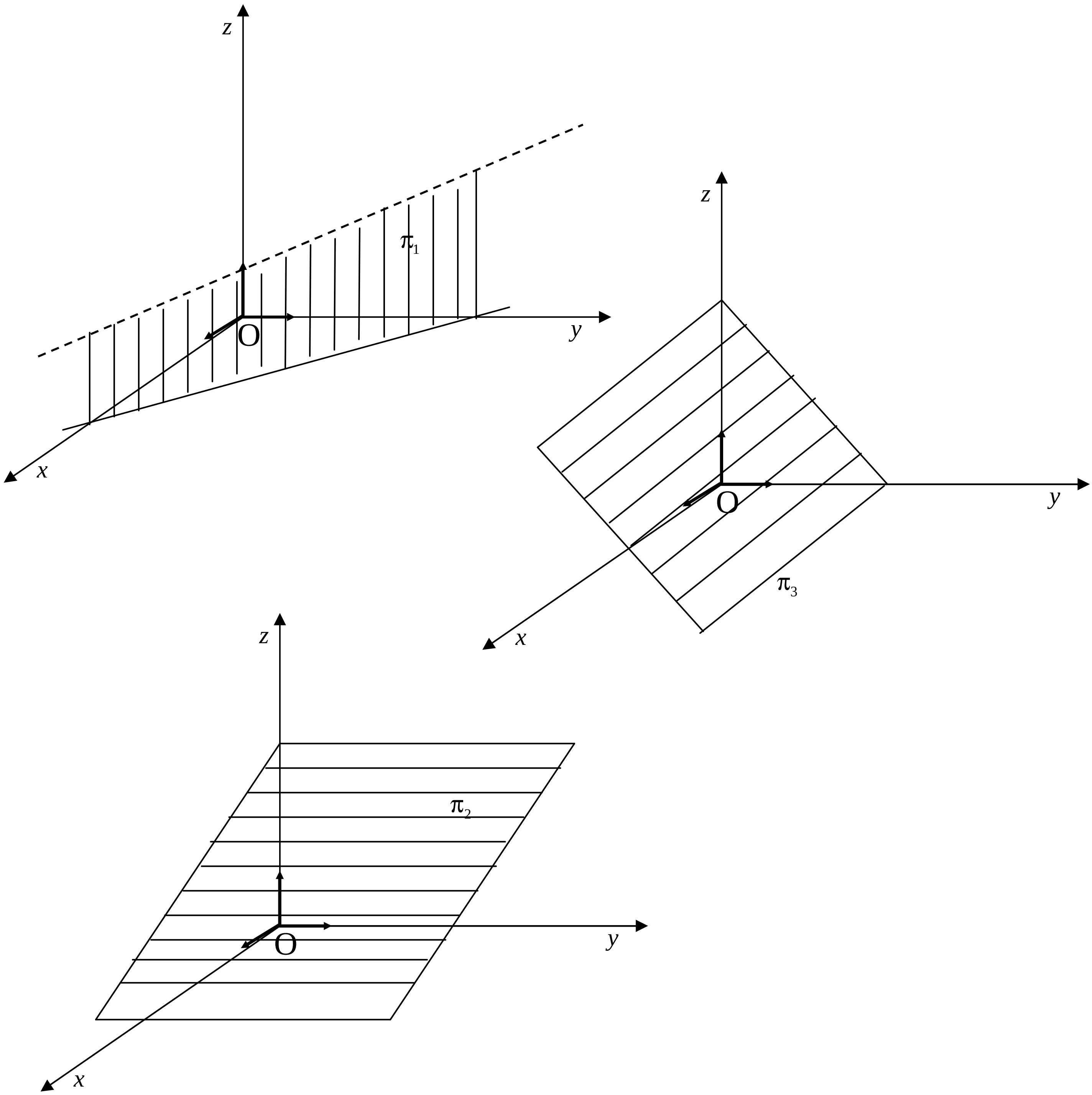
será entonces:

$$\pi_3)\quad u_3 y - u_2 z + \left(-u_3 y_1 + u_2 z_1\right) = 0\,;\quad \forall x$$

es la ecuación del plano proyectante de *r*) sobre el plano coordenado *YZ*. Por lo tanto la ecuación de *r*’’), proyección de *r*) sobre dicho plano coordenado es:

$$r''')\quad u_3 y - u_2 z + \left(-u_3 y_1 + u_2 z_1\right) = 0\,;\quad x = 0$$

que es una recta contenida en el *YZ*.



2-2-1- Casos en que se anulan uno o dos coeficientes directores de la recta.

Partiendo de las ecuaciones paramétricas de *r*):

$$r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

obtuvimos la forma canónica de la ecuación de *r*)

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}$$

con la condición que $u_1 \neq 0;\quad u_2 \neq 0;\quad u_3 \neq 0$

Sea por ejemplo $u_1 = 0$, las ecuaciones paramétricas de *r*) quedan así:

$$r)\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

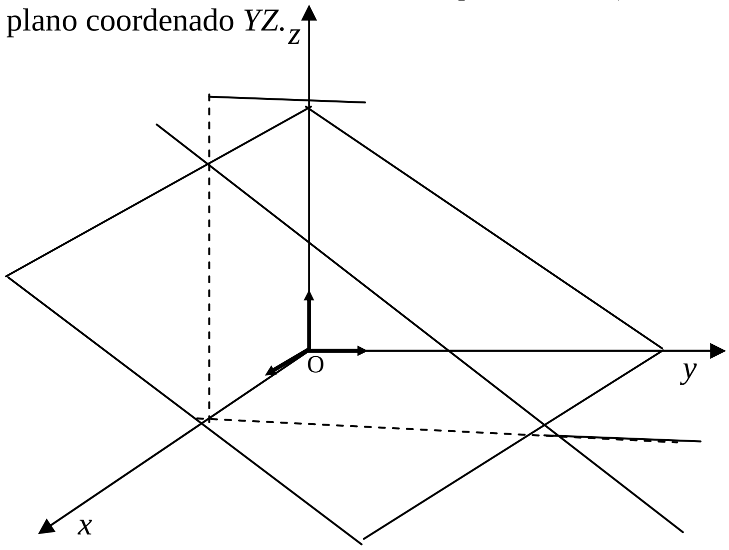
despejando *y* de las dos últimas e igualando nos queda el sistema equivalente:

$$r)\begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{u_2} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \end{cases}$$

es decir en este caso la recta *r*) puede expresarse como la siguiente intersección de conjuntos de puntos del espacio:

$$r = \left\{ P(x;y;z) / \ x = x_1 ; \forall y ; \forall x \right\} \cap \left\{ P(x;y;z) / \ \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3} ; \forall x \right\}$$

Es decir *r*) viene dada como intersección de un plano paralelo al coordenado *YZ* y un plano proyectante sobre el coordenado *YZ*. Es fácil ver que la recta *r*), en este caso, es una recta paralela al plano coordenado *YZ*.



Se dejan para el lector los casos en que $u_2 = 0$ o bien $u_3 = 0$
Con un análisis similar al que hicimos se llaga a las ecuaciones paramétricas de la recta para estas situaciones. Resulta la recta *r*) paralela al plano coordenado *XZ* (si $u_2 = 0$) ó bien *r*) es paralela al coordenado *XY* (si $u_3 = 0$)

Si se anulan dos coeficientes directores, por ejemplo $u_1 = u_2 = 0; \; u_3 \neq 0$, las ecuaciones paramétricas de *r*) quedan así:

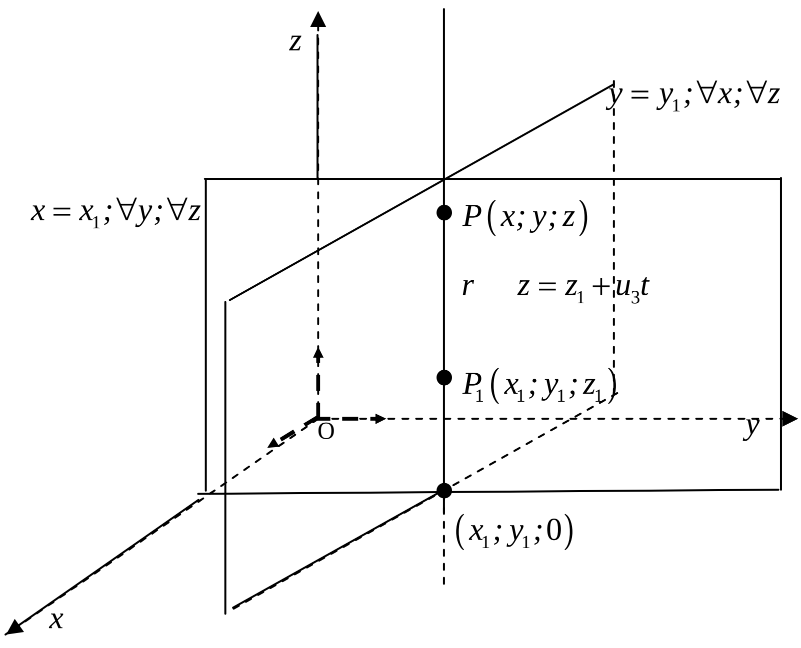
$$r)\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

Con las dos primeras ecuaciones ya podemos expresar a la recta *r*) como intersección de dos conjuntos de puntos del espacio.

$$r = \{P(x;y;z) / x = x_1; \forall y; \forall x\} \cap \{P(x;y;z) / y = y_1; \forall x; \forall z\}$$

es decir *r*) viene dada como intersecciones de un plano paralelo al coordenado *YZ*, con otro plano que a su vez, paralelo al coordenado *XZ*.

La recta *r*) es sin más una recta paralela a ambos planos coordenados , es decir es paralela al eje *z*, en este caso.



En forma análoga estudiar los casos $u_1 = u_3 = 0; \; u_2 \neq 0$ (la recta es paralela al eje *Y*), y $u_2 = u_3 = 0; \; u_1 \neq 0$ (la recta es paralela al eje *X*).
En todos los casos particulares vistos estudiar la posición de la recta y obtener sus ecuaciones, cuando el punto $P_1(x_1; y_1; z_1)$ de paso es el origen de coordenadas.

Ejemplo 1:

Dado el punto $A(-1; 2; 1)$ hallar las ecuaciones de la recta *r*) que pasa por el punto *A* y forma ángulos iguales con los ejes coordenados. Determinarse además las ecuaciones de los planos proyectantes y las proyecciones ortogonales de *r)* sobre cada plano coordenado, así como las intersecciones de *r*) con dichos planos coordenados.
Las ecuaciones de *r*) serán, en forma paramétrica:

$$r)\begin{cases} x = -1 + u_1 t \\ y = \;\; 2 + u_2 t \\ z = \;\; 1 + u_3 t \end{cases}$$

para determinar $\vec{u} = (u_1;\, u_2;\, u_3)$, que da la dirección de *r*) , tenemos en cuenta que *r*) debe formar ángulos iguales con loe ejes coordenados, luego sus cosenos directores, que son los del $\vec{u}$, deben ser iguales, por lo tanto deben ser iguales los coeficientes directores de $\vec{u}$ (y de *r*), esto significa que cualquier vector $\vec{u}$ que tenga las tres componentes iguales es un vector "contenido" en la recta.
Tomemos por ejemplo $\vec{u}$ = (1; 1; 1), luego las coordenadas de *r*) serán:

$$r)\begin{cases} x = -1 + t \\ y = \;\; 2 + t \quad (8) \\ z = \;\; 1 + t \end{cases}$$

la ecuación del plano proyectante de *r*) sobre el plano coordenado *XY*, se obtiene eliminando *t* entre los dos primeros .
es decir

$$x + 1 = y - 2$$

o sea

$$x - y = -3; \quad \forall z$$

es la ecuación buscada. Mientras que la proyección (ortogonal), de *r*) sobre el plano *XY*, sean según vimos:

$$r')\quad x - y = -3; \quad z = 0$$

la ecuación del plano proyectante de *r*) sobre el plano coordenado *XZ*, se obtiene eliminando *t* entre la 1º y la 3º de (8) y se tiene:

$$x + 1 = z - 1$$

es decir:

$$x - z = -2; \quad \forall y$$

(plano proyectante de *r*) sobre *XZ*)

mientras que

$$r'')\quad z - x = -2; \quad y = 0$$

es la ecuación de la proyección (ortogonal) de *r*) sobre dicho plano coordenado.
En forma similar se obtiene:

Ecuación plano proyectante de *r*) sobre el coordenado *YZ* (eliminando *t*, entre segunda y tercera de (8)):

$$y - z = 1 \quad \forall x$$

mientras que la proyección (ortogonal) de *r*) sobre dicho plano *YZ*, será:

$$y - z = 1 \quad x = 0 \quad (r''')$$

la intersección de *r*) con el plano coordenado , será un punto $P_1(x_1; y_1; 0) \Leftrightarrow z_1 = 0$
de la última de las ecuaciones (8) se tiene:

$$0 = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$$

valor que reemplazado en las ecuaciones restantes de (8), nos da:

$$x_1 = -1 - 1 = -2$$
$$y_1 = 2 - 1 = 1$$

luego

$$P_1(-2; 1; 0)$$

la intersección de *r*) con el plano coordenado *XZ* será un punto $P_2(x_2; 0; z_2) \Leftrightarrow y_2 = 0$
de la segunda ecuación de (8) se tiene:

$$0 = 2 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = -2$$

este valor se reemplaza en las ecuaciones restantes de (8) y se tiene:

$$x_2 = -1 - 2 = -3$$
$$y_2 = 1 - 2 = -1$$

luego

$$P_2(-3; 0; -1)$$

La intersección de *r*) con el plano coordenado *YZ* será un punto $P_2(...; y_3; z_3) \Leftrightarrow x_3 = 0$

De la primera ecuación de (8) se obtiene:

$$0 = -1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

este valor se reemplaza en las ecuaciones restantes de (8) y se llega

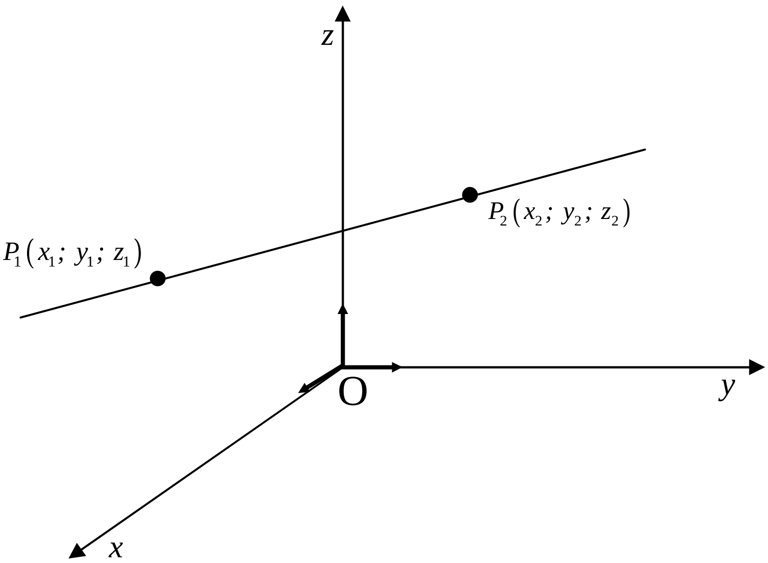
$$y_3 = 2 + 1 = 3$$
$$z_3 = 1 + 1 = 2$$

Entonces:

$$P_3(0; 3; 2)$$

2-3- Ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos conocidos.

Sean $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Se toma como punto del plano cualquiera de los dos, por ejemplo P_1.



Además es evidente que un vector que da la dirección de la recta es

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

por ello, las ecuaciones de la recta, en forma paramétrica son:

$$r)\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

Ejemplo 2:

Hallar las ecuaciones de la recta *r*) que pasa por los puntos $P_1(1;\ 6;\ 3)$; $P_2(3;2;3)$

Un punto de paso será por ejemplo $P_1(1;\ 6;\ 3)$. Además $\overrightarrow{P_1P} = \vec{u} = (2;-4;0)$.

Luego:

$$r)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + 4t \\ z = 3 \end{cases}$$

Si queremos expresar a *r*) como intersección de dos planos proyectantes, eliminando *t*, entre las dos primeras ecuaciones:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{-4}$$

operando se llega

$$-2x - y + 8 = 0; \quad \forall z$$

(plano proyectante sobre *XY*)

De la tercera ecuación:

$$z = 3; \quad \forall x; \forall y$$

tenemos la ecuación de un plano paralelo al coordenado *XY*, es decir proyectante sobre los coordenados *XZ* y *ZY*.

Luego la recta *r*) puede expresarse:

$$r)\begin{cases} -2x - y + 8 = 0; \quad \forall z \\ z = 3 \qquad\qquad ; \quad \forall x; \forall y \end{cases}$$

La recta *r*) es paralela al plano coordenado *XY*.

2-4-Forma general de las ecuaciones de la recta en el espacio

Se puede considerar una recta *r*) , en el espacio, como la intersección de dos planos cualesquiera **no paralelos**.
Es decir si

$$\pi_1) \, a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2) \, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

entonces

$$r = \left\{P(x;y;z) / \, a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\right\} \cap \left\{P(x;y;z) / \, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\right\} =$$
$$= \left\{P(x;y;z) / \, a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\right\}$$

Este último miembro es equivalente a escribir el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en *x, y, z*:

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

que es la forma general de las ecuaciones de la recta en R^3
el sistema (9) nos da la recta *r*) como intersección de dos planos no paralelos. Debemos observar que dada una recta en R^3, existen infinitos pares de planos no paralelos (entre ellos, los pares de planos proyectantes ya vistos), que la determinan. (ver sistemas (6))

2-5-Pasaje de la forma general a las ecuaciones paramétricas y recíprocamente.

Dada:

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (\pi_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad (\pi_2) \end{cases}$$

π_1 y π_2 no paralelos
queremos obtener las ecuaciones paramétricas de *r*).

Para ello necesitamos los vectores $\vec{u}$ que dan la dirección de *r*) y un punto de paso. Para obtener $\vec{u}$ pensamos que *r*) $\in \pi_1 \cap \pi_2$, por lo tanto el vector normal a

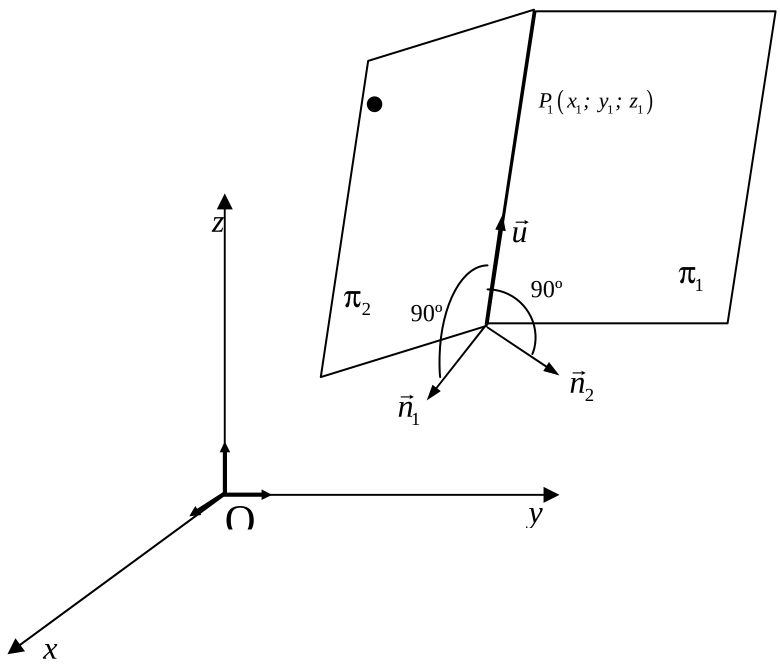
$$\pi_1 : \vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1) \perp r$$

lo mismo

$$\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2) \perp r$$

pero estas dos condiciones implican:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 \perp \vec{u} \\ \vec{n}_2 \perp \vec{u} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \qquad (10)$$



Ejemplo 3:

Hallas las ecuaciones paramétricas de la recta

$$r)\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 2 & (\pi_1) \\ 3x - 8y + 2z = 5 & (\pi_2) \end{cases} \quad (11)$$

Aplicando (10) obtenemos un vector $\vec{u}$ que da la dirección de *r*).
Al ser $\vec{n}_1 = (2; -3; 7);\ \vec{n}_2 = (3; -8; 2)$ será

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 50\vec{i} + 17\vec{j} - 7\vec{k}$$

Luego $\vec{u} = (50; 17; -7)$ (o cualquier múltiplo escalar de él) dará la dirección de *r*)

Para hallar un punto de paso $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, hacemos por ejemplo, $z_1 = 0$ (que equivale a hallar la intersección de *r*) con el plano coordenado *XY*).

Reemplazamos en (11) y se tiene:

$$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x-8y=5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo, aplicando la regla de Cramer, se tiene:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7};\quad y_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}}=\frac{4}{-7}=-\frac{4}{7}$$

es decir un punto de *r*) será $P_1\left(\frac{1}{7};-\frac{4}{7};0\right)$ y las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r)\begin{cases} x= \frac{1}{7}+50t \\ y=-\frac{4}{7}+17t \\ z= \quad -7t \end{cases} \qquad (12)$$

Ejemplo 4:

Determinar la recta anterior como intersección de los planos proyectantes sobre los coordenados *XY* y *XZ.*

Para hallar las ecuaciones del plano proyectante sobre el coordenado *XY*, eliminemos t Entre las dos primeras ecuaciones de (12) y se tiene:

$$\left(x-\frac{1}{7}\right)\frac{1}{50}=\left(x+\frac{4}{7}\right)\frac{1}{17} \iff 17x-50y-31=0 \ \ \forall z$$

es el plano proyectante

Para hallar la ecuación del plano proyectante de *r*) sobre el coordenado *XZ,* se elimina *t*, entre la primera y última ecuación de (12), se obtiene:

$$\left(x-\frac{1}{7}\right)\frac{1}{50}=-\frac{1}{7}z \iff -7x-50y+1=0 \ \ \forall y$$

es el plano proyectante buscado.

Entonces la misma recta *r*) del ejemplo 3, puede darse así:

$$r)\begin{cases} 17x-50y-31=0 \\ -7x-50y+1=0 \end{cases}$$

Observación:

Dada la recta *r*) del ejercicio 3

$$r)\begin{cases} 2x-3y-+7z=2 \\ 3x-8y+2z=5 \end{cases}$$

la ecuaciones de los planos proyectantes se pueden obtener directamente del sistema dado. Por ejemplo: ecuación del plano proyectante sobre el coordenado *XY*, se elimina *z* entre ambas ecuaciones para ello multiplicamos ambos miembros de la primera ecuación por 2, y ambos miembros de la segunda ecuación por 7, luego restamos, se llega a la ecuación consecuencia del sistema:

$$-17x+50y=-31 \quad \Leftrightarrow$$
$$17x-50y-31=0, \quad \forall z$$

como habíamos obtenido.

Para obtener la ecuación del plano proyectante sobre el plano coordenado *XZ*, eliminemos *y*, entre ambas ecuaciones del sistema dado. Para ello multipliquemos la primera ecuación por (-8) y a la segunda por 3 y luego sumamos, se obtiene la ecuación:

$$7x+50z=1 \quad \Leftrightarrow$$
$$-7x-50z+1=0 \quad \forall y$$

como obtuvimos

Veamos ahora el problema inverso, nos dan una recta por sus ecuaciones paramétricas:

$$r)\begin{cases} x=x_1+u_1t \\ y=y_1+u_2t \\ z=z_1+u_3t \end{cases} \qquad (13)$$

y se quiere pasar a la forma general, es decir, expresarla como intersección de un par cualquiera de planos no paralelos, tal que $r=\pi_1 \cap \pi_2$.

Conviene expresar *r*) como intersección de dos planos proyectantes. Este problema ya lo hemos estudiado, basta eliminar *t* entre dos pares cualesquiera de las ecuaciones de (13) se tienen así, según vimos pares de planos proyectantes de *r*) sobre los coordenados (ver sistemas (6)) y el ejemplo 1.

Ejercicio:

Determinar la forma general de la recta *r*) /

$$r)\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-3t \\ z=2t \end{cases}$$

Respuesta:

$$r)\begin{cases}3x+y=1\\2x-z=2\end{cases}\quad \text{o bien}\quad r)\begin{cases}3x+y=1\\2y+3z=-4\end{cases}\quad \text{o bien}\quad r)\begin{cases}2x-z=2\\2y+3z=-4\end{cases}$$

2-6- Ángulos entre dos rectas, condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas.

Sean las rectas

$$r_1)\begin{cases}x=x_1+u_1t\\y=y_1+u_2t\\z=z_1+u_3t\end{cases};\qquad r_2)\begin{cases}x=x_2+v_1t\\y=y_2+v_2t\\z=z_2+v_3t\end{cases}$$

donde $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ y $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ dan las direcciones de r_1) y r_2) respectivamente.

Si $r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=\alpha\vec{v};\ \alpha\neq 0 \Leftrightarrow u_1=\alpha v_1;\ u_2=\alpha v_2;\ u_3=\alpha v_3$

En este caso ambas rectas son coplanares.

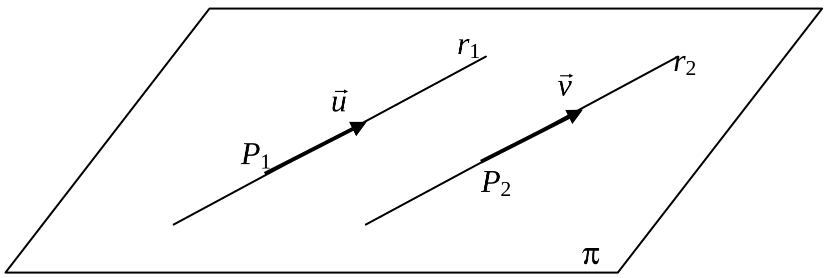


Fig.9

Resumiendo

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u}=\alpha\vec{v} \quad \text{con} \quad \alpha\neq 0$$

Si r_1 y r_2 no son paralelas puede ser

a) $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ en este caso se dicen que las rectas son **alabeadas**.

b) $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, en este caso son coplanares y se cortan en un punto.

En el caso b), uno de los ángulos entre r_1 y r_2 es el ángulo entre los vectores que dan sus direcciones.

Es decir

$$(\widehat{r_1,r_2})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\varphi$$

Recordar que:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \;\rightarrow\; \varphi \qquad (14)$$

$$0 \le \varphi \le \pi$$

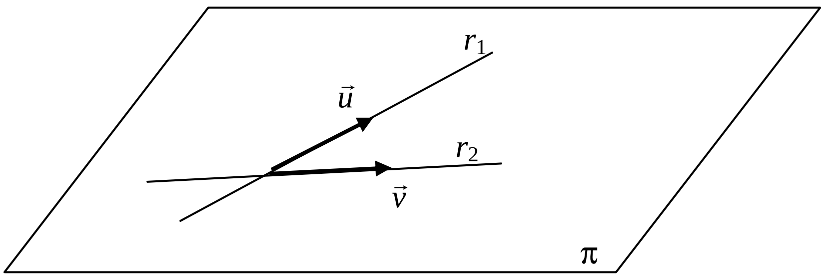


Fig.10

Al ser r_1 y r_2 coplanares serán $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

Si r_1 y r_2 son alabeadas se define como ángulo entre las mismas, al ángulo determinado por dos rectas respectivamente paralelas a las dadas y que se interceptan en un punto (es decir coplanares, como en Fig.11)

Es decir:

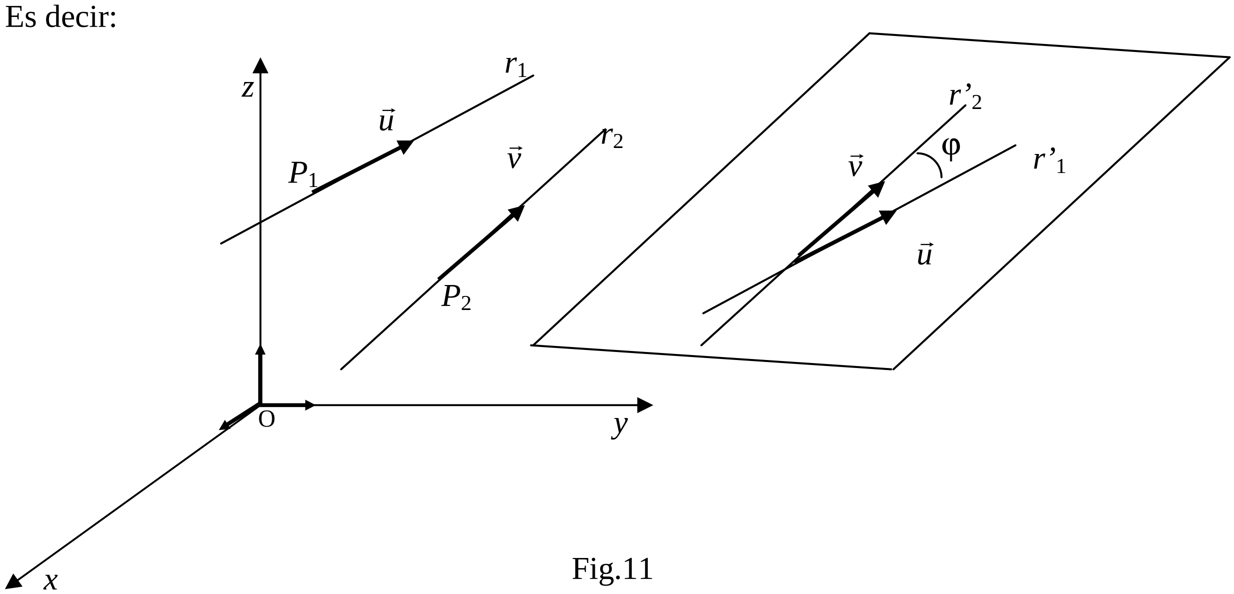


Fig.11

r_1 // r'_1 , r_2 // r'_2 r'_1 y r'_2 coplanarios.

Por definición

$$\widehat{r_1, r_2} = \widehat{r_1', r_2'} = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \varphi$$

el que se calcula con la expresión (14).

Si r_1 y r_2 son alabeadas se dice también que son ortogonales $\Leftrightarrow\ r_1' \perp r_2' \ \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \ \Leftrightarrow\ \vec{u} \times \vec{v} = 0 \ \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

En resumen **las rectas** $\boldsymbol{r_1}$ **y** $\boldsymbol{r_2}$ **, en el espacio** (coplanares o alabeadas) **son ortogonales** $\Leftrightarrow \boldsymbol{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$

Ejemplo 5:
Determinar si el siguiente par de rectas son paralelas u ortogonales.

$$r_1)\begin{cases} x - \dfrac{2}{7}z = \dfrac{15}{7} & (\pi_1) \\ y + \dfrac{5}{7}z = -\dfrac{34}{7} & (\pi_2) \end{cases} \quad ; \quad r_2)\begin{cases} x - y - z - 7 = 0 & (\pi_3) \\ 3x - 4y - 11 = 0 & (\pi_4) \end{cases}$$

Ambas rectas dadas en su forma general. Debemos determinar los vectores que dan sus respectivas direcciones.
Para r_1) tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = \left(1;0;-\dfrac{2}{7}\right) \\ \vec{n}_2 = \left(0;1;\dfrac{5}{7}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{2}{7} \\ 0 & 1 & \dfrac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \vec{k}$$

Para r_2):

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_3 = (1;-1;-1) \\ \vec{n}_4 = (3;-4;0) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_3 \wedge \vec{n}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

Es evidente que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos $\Leftrightarrow r_1 \not\parallel r_2$
Veamos
$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{5}{7};1\right) \times (-4;-3;-1) = -\dfrac{8}{7} + \dfrac{15}{7} - 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow r_1$ *y* r_2 son ortogonales

2-7- Condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre recta y plano

Sean

$$\pi)\ ax + by + cz + d = 0 \quad \text{y} \quad r)\begin{cases} x = x_1 + u_1t \\ y = y_1 + u_2t \\ z = z_1 + u_3t \end{cases}$$

El vector normal a r) es $\vec{n} = (a;b;c)$ y el vector que da la dirección de r) es $\vec{u} = (u_1;u_2;u_3)$.
Entonces :
1º) Si $r \,//\, \pi \ \Leftrightarrow\ \vec{n} \perp \vec{u} \ \Leftrightarrow\ \vec{n} \times \vec{u} = 0 \ \Leftrightarrow\ au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$

que es la conclusión de paralelismo entre recta y plano

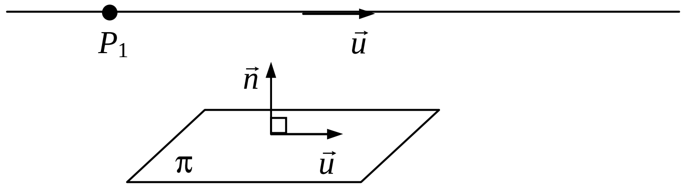
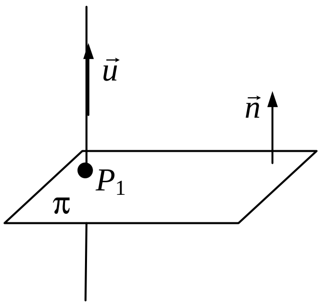


Fig.12

2º) Si

$$r \perp \pi \;\Leftrightarrow\; \vec{n} \,//\, \vec{u} \;\Leftrightarrow\; \vec{n} = \alpha\vec{u} \;\Leftrightarrow\; (a;b;c) = \alpha(u_1;u_2;u_3) \Leftrightarrow a = \alpha u_1; b = \alpha u_2; c = \alpha u_3 = 0$$

que es la condición de ortogonalidad entre recta y plano



2-8- Ángulos entre recta y plano

Dados una recta y un plano:

$$r)\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_1)\, ax + by + cz + d = 0$$

Se define el ángulo determinado por la recta *r*) y el plano π_1, al ángulo que forman *r*), con su proyección ortogonal *r'*), sobre π_1.

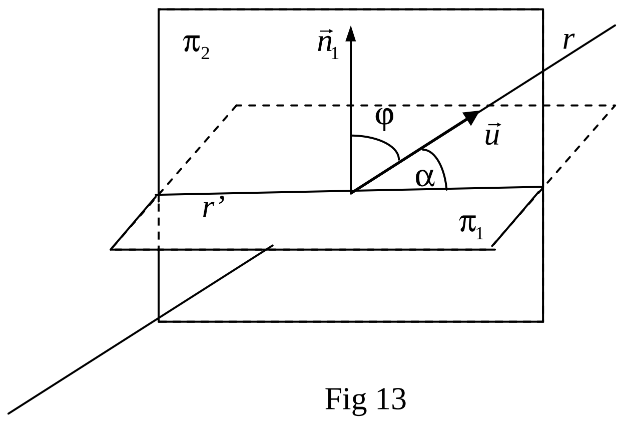


Fig 13

$r \in \pi_2; \quad \pi_2 \perp \pi_1;$

la proyección ortogonal de *r* sobre π_1 es : $r' = \pi_1 \cap \pi_2$

$\widehat{\pi_1, r} = \widehat{r, r'} = \alpha$. Por otra parte $\widehat{(\vec{n}, \vec{u})} = \varphi$ es complementario de α

Luego

$$cos\,\varphi = sen\,\alpha = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{u}}{|\vec{n}||\vec{u}|} = \frac{au_1 + bu_2 + cu_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}} \to \alpha$$

2-9- Problemas de intersección
2-9-1- intersección de rectas en el espacio
Idem las rectas:

$$r_1)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad ; \quad r_2)\begin{cases} x = x_2 + v_1 s \\ y = y_2 + v_2 s \\ z = z_2 + v_3 s \end{cases}$$

Determinar si existe en el espacio en el espacio, pueden presentarse sus ecuaciones en forma general como intersección de pares de planos proyectantes. Así:

$$r_1 = \left\{ P(x; y : z) / \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \wedge \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{z - z_1}{u_3} \right\}$$

y para r_2 es

$$r_2 = \left\{ P(x; y : z) / \frac{x - x_2}{v_1} = \frac{y - y_2}{v_2} \wedge \frac{x - x_2}{v_1} = \frac{z - z_2}{v_3} \right\}$$

Es evidente que si se desea estudiar $r_1 \cap r_2$, ello equivale algebraicamente a plantear el sistema siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u_2} \\ \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \\ \dfrac{x - x_2}{v_1} = \dfrac{y - y_2}{v_2} \\ \dfrac{x - x_2}{v_1} = \dfrac{z - z_2}{v_3} \end{cases}$$

Los puntos $P(x; y; z) \in r_1 \cap r_2$ deben ser solución de este sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que equivale a considerar la intersección de cuatro planos. Más adelante aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones lineales en general.

Por ahora procederemos así: se plantea la intersección de tres de los cuatro planos, supongamos que exista, entonces se verifica si dicha intersección satisface la ecuación del cuarto plano.

- Si existe un único punto de intersección $\left(x_0; y_0; z_0\right)$,entonces las rectas r_1 y r_2 se cortan en dicho punto y son coplanares.
- Si la intersección es vacía, entonces r_1 y r_2 son paralelas (coplanares) ó alabeadas (es sistema es incompatibles)
- Si los puntos de una de las rectas son soluciones del sistema ambas rectas son coincidentes (el sistema se dice indeterminado)

Ejemplo 6

Hallar la intersección, si existe, de las rectas

$$r_1)\begin{cases} x+2y=1 \\ 5y-z=-7 \end{cases} \quad ; \quad r_2)\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2y+3z=38 \end{cases}$$

como vemos acá las rectas ya vienen dadas como intersección de pares de planos proyectantes. Entonces para plantear $r_1 \cap r_2$, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+2y \quad =1 \\ \quad 5y-z=-7 \\ 3x \ +4y \quad =1 \\ \quad 2y+3z=38 \end{cases} \quad (15)$$

Veamos la posible solución del sistema formado, por ejemplo, con las tres ecuaciones del sistema.
Las podemos resolver, por ejemplo, aplicando la Regla de Cramer.
Tendríamos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{2}{-2}=-1 \ ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-24}{-2}=12$$

La solución $\left(-1;1;12\right)$ es la solución de las tres primeras ecuaciones de (15) pero no del sistema.

Por ello debemos ver si verifica la última ecuación del mismo :

$$2\,.1+3\,.\,12=38$$

Luego sin más ambas rectas se cortan en el punto $P_1\left(-1;1;12\right)$ y por lo tanto son coplanares.
Podemos escribir entonces:

$$r_1 \cap r_2 = \left\{\left(-1;1;12\right)\right\}$$

2-9-2- Intersección de rectas y planos.

Sean la recta

$$r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \pi)\, ax + by + cz + d = 0$$

Se desea $r \cap \pi$ es decir el conjunto:

$$r \cap \pi = \left\{P\left(x;y;z\right) / \; x = x_1 + u_1 t;\; y = y_1 + u_2 t;\; z = z_1 + u_3 t; ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

lo que equivale a plantear el sistema:

$$\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas de fácil solución por sustitución.
Para ello reemplazamos en la última ecuación los valores de *x, y, z* dados en las tres primeas ecuaciones, se obtendrá una ecuación en *t* del tipo

$$\alpha t = \beta; \text{ si } \alpha \neq 0 \quad \text{entonces } t = \frac{\beta}{\alpha}$$

Reemplazando este valor de *t* en las primeras se obtiene

$$\left\{\left(x_0; y_0; z_0\right)\right\} = r \cap \pi$$

es decir el punto de intersección de r y π.

Si $\alpha = 0$ puede ser:

1) $\beta = 0$, luego quedará $0\,t = 0$, ecuación que se verifica $\forall t \in R$, lo que equivale a decir que todo valor de *x, y, z* de las tres primeras verifica la ecuación del plano.
En este caso en que las recta está contenida en el plano.
Es decir:

$$r = r \cap \pi \qquad \text{en este caso.}$$

2) $\beta \neq 0$, entonces será $0t = \beta$ ecuación incompatible, lo que significa que para ningún valor de *t* se obtendrán valores *x*, *y*, *z* de loas tres primeras ecuaciones que verifiquen la ecuación del plano.

En otras palabras

$$r \cap \pi = \varnothing \text{ (sistema incompatible).}$$

Geométricamente significa que $r \,//\, \pi$

Ejemplo 7:

Hallar , si existe $r \cap \pi$, siendo $\pi)\ 2x - y + z - 1 = 0$ y $r)\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = \ \ 1 - t \end{cases}$ el sistema a plantear es el siguiente:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = \ \ 1 - t \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Reemplazando las tres primeras en la última, se tiene:

$$2t - (-1 + 2t) + (1 - t) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t + 1 = -2t + 1 - t - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - t = 0 \ \Leftrightarrow \ t = 1$$

Reemplazando este valor de *t* en cada una de las tres primeas ecuaciones y obtenemos:

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = -1 + 2 = 1$$
$$z_0 = 1 - 1 = 0$$

Luego *r* y π se cortan en el punto $P_0(1;1;0)$

Observación: si la recta *r*) viene dada como intersección de planos proyectantes, por ejemplo,

$$r) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u_2} \\ \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \end{cases}$$

Entonces $r \cap \pi$,razonando como siempre, nos lleva a plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir la intersección de tres planos.

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1} = \dfrac{y-y_1}{u_2} \\ \dfrac{x-x_1}{u_1} = \dfrac{z-z_1}{u_3} \\ ax+by+cz+d = 0 \end{cases}$$

que y sabemos encarar, aunque el camino anterior es más sencillo.

2-10 Problemas de distancia

2-10-1- Distancia de un punto a una recta en el espacio.

Sean

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \qquad \text{y el punto } P_0\left(x_0\, ; y_0\, ; z_0\right)$$

se desea hallar la distancia de P_0 a $r)$ que simbolizaremos

$$\delta(P_0 ; r)$$

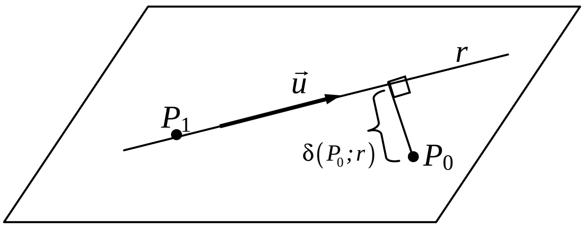


Fig.14

Si $P_0 \in r \;\Rightarrow\; \delta(P_0 , r) = 0$

Consideremos entonces $P_0 \notin r$

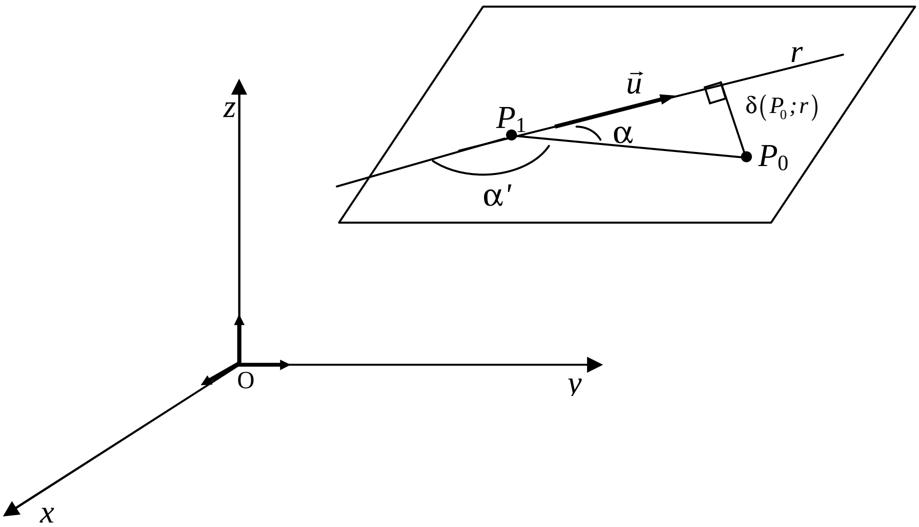


Fig 15

En el $\overset{\triangle}{P_1 R P_0}$ contenido en π, se verifica que:

$\delta(P_0;r) = \left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| sen\,\alpha$, como $\vec{u} \neq \vec{0}$ podemos multiplicar y dividir por $|\vec{u}|$ tenemos:

$$\delta(P_0;r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| |\vec{u}|\, sen\,\alpha}{|\vec{u}|} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$

expresión esta última que nos da la distancia pedida. Observemos que si el sentido de $\vec{u}$ fuera contrario deberíamos trabajar con α', pero $sen\,\alpha' = sen\,\alpha$ pues $\alpha + \alpha' = \pi$.

Ejemplo 8

Calcular $\delta(P_0;r)$ siendo:

$$r)\begin{cases} x = -1 + t \\ y = \ \ 1 + 2t \quad ; \quad P_0(1;2;-2) \\ z = \quad\ \ -t \end{cases}$$

$$\vec{u} = (1;2;-1); \quad P_1 \in r \,/\, P_1(-1;1;0)\ ; \quad \overrightarrow{P_1P_0} = (2;1;-2)\ ; \ |\vec{u}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

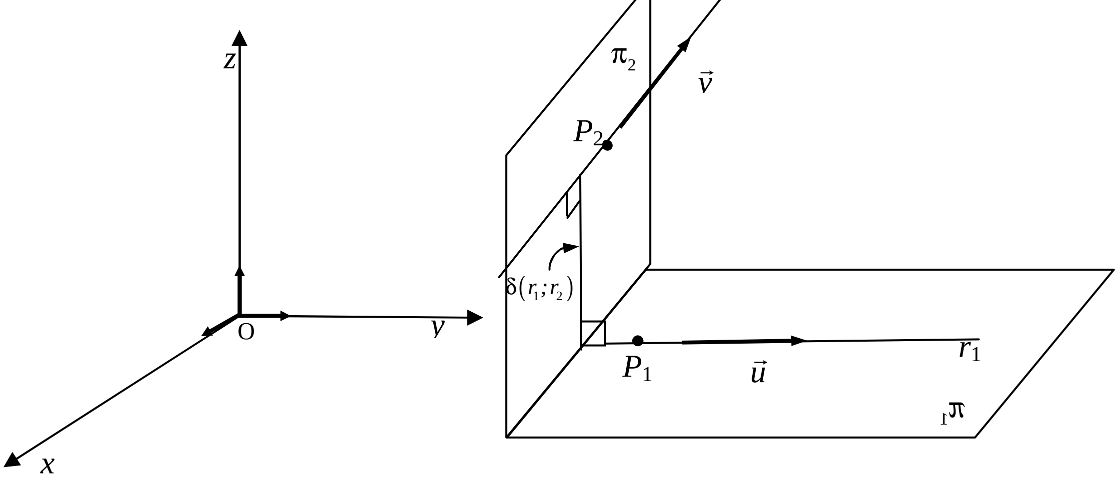
$$\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}; \ \left|\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{u}\right| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18}$$

luego

$$\delta(P_0;r) = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} \cong 1{,}73$$

2-10-2- Distancias entre dos rectas alabeadas

Dada dos rectas alabeadas, es decir no coplanarios se desea calcular las distancias entre ellas, es decir la distancia medida sobre la dirección normal a ambas .Veamos la figura siguiente, además simbolizaremos dicha distancia así: $\delta(r_1;r_2)$



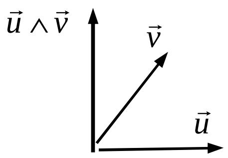


Fig.16

Observemos que la distancia $\delta(r_1;r_2)$ se obtiene proyectando $\overrightarrow{P_1P_0}$ sobre la dirección normal a r_1 y r_2 simultáneamente, dicha dirección normal a ambas rectas viene dada por la dirección de $(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
Entonces dados

$$r_1)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} ; \qquad r_2)\begin{cases} x = x_2 + v_1 s \\ y = y_2 + v_2 s \\ z = z_2 + v_3 s \end{cases}$$

donde $\vec{u} = (u_1;u_2;u_3)$ da la dirección de r_1) y $\vec{v} = (v_1;v_2;v_3)$ da la dirección de r_2).
Por lo dicho arriba será:

$$\delta(r_1;r_2) = \left| Proy_{(\vec{u}\wedge\vec{v})} \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times (\vec{u} \wedge \vec{v})_0 \right| = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v})}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} \right|$$

expresión que permite calcular la distancia pedida.

Ejemplo 9

Hallar la distancia entre las rectas

$$r_1)\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} ; \qquad r_2)\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 3s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$$

$P_1(2;1;-1)$; $P_2(1;2;-1)$ luego $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1;1;0)$ además $\vec{u} = (-1;2:1)$; $\vec{v} = (2;-3;-4)$

Calculamos ahora:

$$\left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{matrix} \right\| = 3$$

Entonces:

$$\delta(r_1;r_2)=\frac{3}{\sqrt{30}}$$

3-10- Condición de coplanaridad de rectas en el espacio

Sean las rectas:

$$r_1)\begin{cases} x=x_1+u_1t \\ y=y_1+u_2t \\ z=z_1+u_3t \end{cases};\qquad r_2)\begin{cases} x=x_2+v_1s \\ y=y_2+v_2s \\ z=z_2+v_3s \end{cases}$$

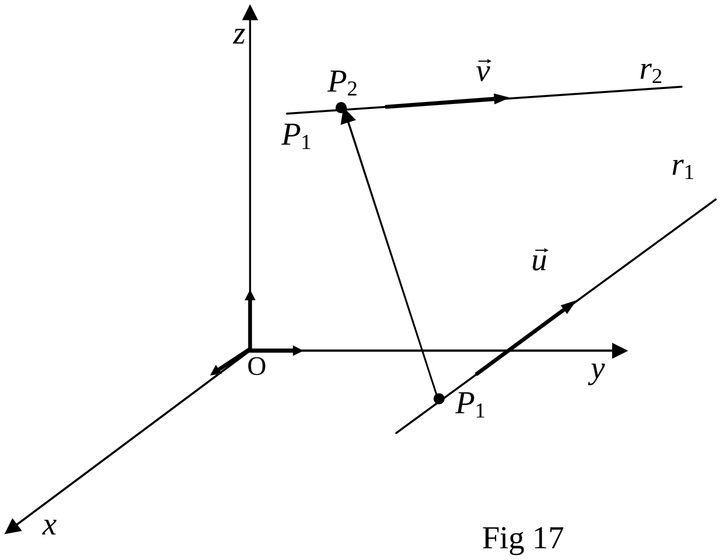


Fig 17

Si r_1 y r_2 son coplanares deberán ser coplanares los vectores : $\overrightarrow{P_1P_2};\ \vec{u}$ y $\vec{v}$.

Luego r_1 y r_2 son coplanares $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{u}\wedge\vec{v}=0$

Como $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1:z_2-z_1)$

$$\vec{u}=(u_1;u_2;u_3);\quad \vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$$

La condición de coplanaridad de r_1 y r_2 será:

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

3-11-Haz de planos

Sean los planos $\pi_1)\,a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$; $\pi_2)\,a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

Tal que π_1 no es paralelo a π_2, luego $\pi_1 \cap \pi_2 = r$. Es decir tenemos una recta darle por sus ecuaciones en forma general.

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

queremos hallar una ecuación que nos da en la posible, todos los planos que pasan por $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Dicho conjunto de planos se llama haz (o familia) de planos de eje *r*. Para obtener esa ecuación, a la primera ecuación de (16) le sumamos la segunda multiplicada previamente por un número $\lambda \in R$ se obtiene:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

es decir

$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + (d_1 + \lambda d_2) = 0 \quad (17)$$

esta ecuación es de primer grado en *x*, *y*, *z*, luego para cada valor de λ, tendremos la ecuación de un punto.
Ahora debemos mostrar que los planos que 17 contienen a la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$

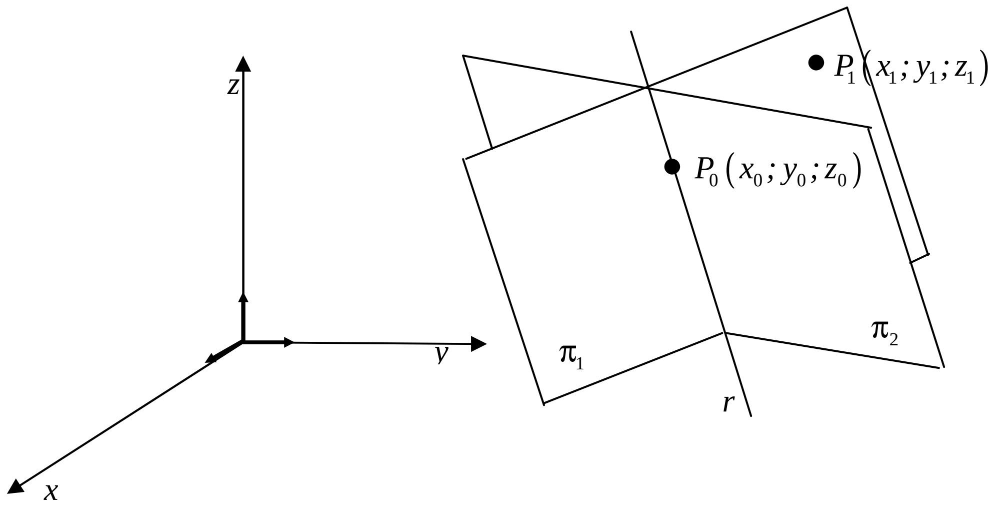


Fig.18

Para ello tomamos un punto **arbitrario** $P_0(x_0; y_0; z_0) \in r = \pi_1 \cap \pi_2$ y probamos que verifica la ecuación del haz de planos (17)

En efecto como $P_0 \in (\pi_1 \cap \pi_2) \Leftrightarrow P_0 \in \pi_1$ y $P_0 \in \pi_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 = 0 \end{cases} \text{ (identidades numéricas)}$$

Si a la primera le sumamos la segunda multiplicada por $\lambda \in R$, tendremos :

$$\left(a_1+\lambda a_2\right)x_0+\left(b_1+\lambda b_2\right)y_0+\left(c_1+\lambda c_2\right)z_0+\left(d_1+\lambda d_2\right)=0$$

Entonces $P_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\in$ a los planos que se obtienen de la ecuación (17) para cada valor de λ. Como $P_0\in r$ es arbitrario, **equivale a decir que los planos que se obtienen de (17) contienen a toda la recta $r = \pi_1 \quad \pi_2$**.

Finalmente probaremos que (17) da todos los planos del haz, excepto aquel cuya ecuación fue multiplicada por λ , en nuestro caso π_2. Para ello pensemos en determinar la ecuación del plano del haz que pasa por un punto $P_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$. Debemos determinar el correspondiente valor de λ , para ello, pensemos que $P_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$ tiene que verificar (17) pues P_1 pertenece a un plano del haz.

Tenemos:

$$\left(a_1+\lambda a_2\right)x+\left(b_1+\lambda b_2\right)y+\left(c_1+\lambda c_2\right)z+\left(d_1+\lambda d_2\right)=0$$

Despejemos λ, y tenemos:

$$\lambda=-\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}$$

este valor de λ existe $\Leftrightarrow\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2\neq 0\ \Leftrightarrow\ P_1\notin\pi_2$

Luego la ecuación (17) representa a todos los planos del haz de eje $r=\pi_1\cap\pi_2$, excepto π_2 (en este caso).

Si se quiere la ecuación de todos los planos del haz, deberá considerarse:

$$\begin{array}{c}\left(a_1+\lambda a_2\right)x+\left(b_1+\lambda b_2\right)y+\left(c_1+\lambda c_2\right)z+\left(d_1+\lambda d_2\right)=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\qquad(18)$$

Si $\pi_1 /\!/ \pi_2\ \Leftrightarrow \pi_1\cap\pi_2=\varnothing$ entonces será:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\ ;\ \left(a_2\neq 0;\ b_2\neq 0;\ c_2\neq 0\right)$$

Si sumamos λ a todos los miembros:

$$\frac{a_1}{a_2}+\lambda=\frac{b_1}{b_2}+\lambda=\frac{c_1}{c_2}+\lambda\ \Leftrightarrow\frac{a_1+\lambda}{a_2}=\frac{b_1+\lambda}{b_2}=\frac{c_1+\lambda}{c_2}\ \Leftrightarrow$$ todos los planos de (17) ó (18)

son coincidentes con $\pi_1=\pi_2$

Ejemplo 10

Dados los planos

$$\pi_1)\, x - y - 2z = 1$$

$$\pi_2)\, x + y - z = 2$$

determinar el plano que pasa por $r = \pi_1 \cap \pi_2$ y que verifica, en cada caso las siguientes condiciones:

a) pase por el punto $P_1(2;-3;1)$
b) sea normar al plano $\pi_2)\, 2x + y - 3z = 4$
c) pasa por el punto $P_2(2;0;0)$

La ecuación del haz de planos de eje $r = \pi_1 \cap \pi_2$ es

$$(1+\lambda)x + (-1+\lambda)y + (-2-\lambda)z = (1+2\lambda) \quad (19)$$

a) el valor de λ se obtiene (pues $P_1 \notin \pi_2$) reemplazando sus coordenadas en lugar de *x, y, z* respectivamente.

$$(1+\lambda)2 + (-1+\lambda) - 3 + (-2-\lambda) = (1+2\lambda) \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

reemplazando en (19) se obtiene la ecuación del plano paralelo:

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z = 2$$

b) si el plano (19) debe se perpendicular a π_3 el producto escalar de sus versores normales debe ser nulo.
Es decir, siendo

$$\vec{n}_3 = (2;1;-3) \quad \text{y} \quad \vec{n} = (1+\lambda;\ -1+\lambda;\ -2-\lambda)$$

$$\vec{n}_3 \times \vec{n} = 2(1+\lambda) + (-1+\lambda) + (-3)(-2-\lambda) = 0 \iff \lambda = -\frac{7}{6}$$

Reemplazando en (19) tenemos la ecuación del plano pedido

$$-\frac{1}{6}x - \frac{13}{6}y - \frac{5}{6}z = -\frac{4}{3}$$

c) observemos que $P_2 \in \pi_2$, luego si aplicáramos el método del caso a) veíamos que no existe λ, lo que ocurre que el plano pedido es el propio π_2, cuya ecuación fue multiplicada por λ, es decir:

$$x + y - z = 2$$