GUIA DE ESTUDIO Nº 3: *"EL PLANO"*

Esta guía tiene la intención de ayudarte en el aprendizaje de los contenidos desarrollados en el material de estudio *"El plano" (autor: Ing. Ricardo Sagristá).* Tales contenidos corresponden a la Unidad 6 del Programa Analítico de la Asignatura.

UNIDAD 6 *"Geometría Lineal del Espacio"*
6.1. El plano. Una ecuación vectorial. Ecuación general del plano. Significado de sus coeficientes. Casos particulares. Ecuaciones normalizadas y segmentaria.
6.2. Ángulo entre planos. Condiciones de paralelismo.
6.3. Ecuación del plano que pasa por tres puntos.
6.4. Distancia de un punto a un plano.
6.5. Intersección de planos.

En esta unidad iniciarás el estudio de una superficie: "el plano".

Encontrarás diferentes formas de la ecuación de un plano,
cada una de ellas con un interés particular.
Notarás también ciertas analogías con las ecuaciones de una recta en el plano
y con algunas propiedades métricas tales como el cálculo de ángulos y distancias.

En las actividades propuestas se presentan problemas (numerados del 1 al 15), cuyas respuestas se encuentran al final de la guía.

❖ ***Actividad 1:***
Dibuja en un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el espacio un vector no nulo $\overline{n}$ y un punto P_1. Luego representa al *único* plano que contiene al punto y es perpendicular al vector $\overline{n}$.
Dicho plano, además de P_1, está formado por todos los puntos P del espacio que determinan con P_1 vectores perpendiculares a $\overline{n}$.

❖ ***Actividad 2:***
- Realiza una lectura del material didáctico desde *Definición del plano como lugar geométrico* hasta *Ecuación general del plano*.

1. Encuentra una ecuación y esboza la gráfica del plano que contiene al punto P y es perpendicular al vector $\overline{n}$, cuando:
a) $P(1,2,3)$ y $\overline{n} = \overline{i}$
b) $P(1,2,3)$ y $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j}$
c) $P(1,2,3)$ y $\overline{n} = \overline{j} + \overline{k}$
d) $P(1,2,3)$ y $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$

❖ ***Actividad 3:***
- Continúa con la lectura de los párrafos :
2.1.1. Significado de los coeficientes de la ecuación general de un plano
2.1.2. Ecuación normalizada de un plano
2.1.3. Casos particulares

2.2. Trazas de un plano
2.3. Forma segmentaria de la ecuación de un plano
5. Ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados (pág 16).

- Resuelve:

2. El pie de la perpendicular trazada desde el punto $A(3,6,2)$ a un plano es el punto $B(1,2,6)$. Halla una ecuación de dicho plano y encuentra las coordenadas de los puntos donde intercepta a los ejes coordenados.

3. a) Halla una ecuación del plano que contiene a los puntos: $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$ y $C(-1,7,-2)$
b) Escribe su forma segmentaria y representa gráficamente.
c) Escribe una ecuación normalizada del plano e interpreta el significado del término independiente.

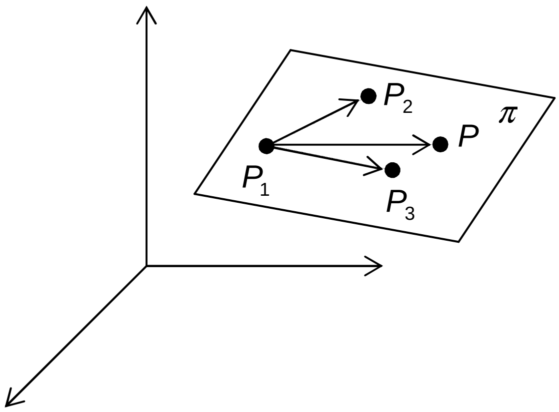
4. Los puntos $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,6)$ son vértices de un paralelepípedo. Sabiendo que los segmentos OA, OB y OC determinan tres aristas del mismo, encuentra:
a) las coordenadas de los restantes vértices,
b) las ecuaciones de los planos que contienen a las caras del paralelepípedo.

5. Halla una ecuación del plano que contiene a los puntos $P(2,1,-1)$ y $Q(-1,0,3)$, y que es perpendicular al plano de ecuación $-x+2y+z=5$.
¿Qué condición deben verificar P y Q para que no haya solución única?

6. Halla una ecuación del plano que contiene al punto $P(2,3,-1)$ y que es simultáneamente perpendicular a los planos de ecuaciones $x+2y+4z-4=0$ y $3x+y-2z=7$.

❖ *Ecuaciones paramétricas de un plano*

Fijado en el espacio un sistema de ejes cartesianos ortogonales y dados tres puntos $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$ y $R(x_3,y_3,z_3)$ no alineados, existe un único plano π que contiene a dichos puntos.



Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del plano π.

$$P(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overline{P_1P} \text{ es combinación lineal de los vectores } \overline{P_1P_2} \text{ y } \overline{P_1P_3} \Leftrightarrow$$

existen escalares s y t tal que $\overline{P_1P} = s\ \overline{P_1P_2} + t\ \overline{P_1P_3}$

Pasando a componentes se tiene que:

$P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow$ existen escalares s y t tal que

$$\begin{cases} x - x_1 = s\ (x_2 - x_1) + t\ (x_3 - x_1) \\ y - y_1 = s\ (y_2 - y_1) + t\ (y_3 - y_1) \\ z - z_1 = s\ (z_2 - z_1) + t\ (z_3 - z_1) \end{cases}$$

En síntesis:

$$\begin{cases} x = x_1 + s\ (x_2 - x_1) + t\ (x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s\ (y_2 - y_1) + t\ (y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s\ (z_2 - z_1) + t\ (z_3 - z_1) \end{cases} \qquad \text{con } s, t \in \Re$$

son unas ecuaciones paramétricas de un plano.

- *Observa que:*
  i) (x_1, y_1, z_1) son las coordenadas de un punto del plano.
  ii) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ y $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ son las componentes de dos vectores paralelos al plano y no paralelos entre sí.

7. a) Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al origen de coordenadas y es paralelo a los vectores $\bar{u} = (1,2,1)$ y $\bar{v} = (1,0,3)$.
b) Obtiene, a partir de las ecuaciones paramétricas, una ecuación general cartesiana.

❖ ***Actividad 4:***

Se tratan aquí problemas de la Geometría Métrica, es decir cálculo de ángulos y distancias.

- Lee atentamente los párrafos:
  3. Ángulo que forman entre sí dos planos
  3.1. Condición de perpendicularidad entre planos
  3.2. Condición de paralelismo entre planos
  3.2.1. Planos coincidentes
  4. Distancia de un punto a un plano
  4.1. Distancia entre dos planos paralelos

- Resuelve:

8. Determina α para que los planos $\pi)\ x + 2y + z = 1$ y $\sigma)\ 2x + \alpha y + 2z = 5$ sean:
a) perpendiculares,
b) paralelos. En este caso calcula la distancia entre los mismos.

9. Halla una ecuación del plano que es paralelo al plano de ecuación $-5x + y - 2z + 8 = 0$, sabiendo que ambos planos equidistan del punto $P(-1,1,4)$.

10. Determina los ángulos que forman los planos $\pi)\ x+y=1$ y $\sigma)\ y+z=2$.

11. Halla el coseno del ángulo agudo que forman los planos de ecuaciones $x-3y+z=4$ y $2x+y+7z=1$.

❖ ***Actividad 5:***

- Continúa con la lectura de *Intersección de tres planos*, obviando los dos ejemplos finales.

Desde un punto de vista algebraico,
la intersección de tres planos requiere la resolución de
un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es objeto de estudio en el curso de Álgebra y Geometría II. Por tal motivo te proponemos que sólo tengas en cuenta las consideraciones geométricas.

- Resuelve los problemas:

12. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

Atención:

Tus justificaciones *deben* ser más amplias que las dadas en las respuestas.
¡Ellas te permitirán controlar tus fundamentaciones!

a) Los puntos $A(5,1,1)$, $B(-1,-2,1)$, $C(3,3,3)$ y $D(16,-1,-4)$ son coplanares.
b) $x+y=0 \quad \forall z$ es una ecuación del plano coordenado XY.
c) La ecuación $(8x+y+z).(x-y+z-2)=0$ representa un par de planos que se interceptan en una recta en el espacio.
d) El plano de ecuación $-3x+2y+5z=2$ se encuentra a dos unidades del origen de coordenadas.
e) Los planos de ecuaciones $x+y+z=1$ y $2x+2y+2z=2$ no tienen puntos en común.
f) Los puntos $A(2,1,5)$, $B(8,-2,0)$ y $C(14,-5,-5)$ determinan un único plano.
g) La ecuación $x.y.z=0$ se satisface para todos los puntos de los planos coordenados.
h) $x-3y+8z-15=0$ es una ecuación de un plano perpendicular al segmento de extremos $A(3,2,-7)$ y $B(5,-4,9)$ que contiene al punto medio del segmento.
i) $z=9$, cualesquiera sean x e y, es una ecuación del plano perpendicular al eje Z que contiene al punto $A(-4,2,9)$.
j) Si dos planos son paralelos, sus trazas sobre cualquiera de los planos coordenados son dos rectas paralelas.
k) $3x+4z=0 \quad \forall y$ es una ecuación de un plano que contiene al eje Y y al punto $P(8,4,-6)$.

13. Halla el volumen del tetraedro formado por el plano $6x+7y+14z-42=0$ y los planos coordenados.

14. Construye el prisma triangular formado por los planos coordenados y por los planos de ecuaciones $x+2y-4=0$ y $z-5=0$. Calcula su volumen.

15. Halla y reconoce la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(1,1,1)$ y $B(3,3,3)$.

❖ RESPUESTAS

1. a) $x=1$ b) $x+y-3=0$ c) $y+z-5=0$ d) $x+y+z-6=0$

2. $x+2y-2z-7=0$ $I_x(-7,0,0)$ $I_y(0,-\frac{7}{2},0)$ $I_z(0,0,\frac{7}{2})$

3. a) $-10x+3y+7z-17=0$ b) $\dfrac{x}{-\frac{17}{10}}+\dfrac{y}{\frac{17}{3}}+\dfrac{z}{\frac{17}{7}}=1$

c) $\dfrac{-10x+3y+7z-17}{\sqrt{158}}=0$, $\dfrac{17}{\sqrt{158}}$ representa la distancia del plano al origen de coordenadas.

4. a) $D(3,2,0)$, $E(3,0,6)$, $F(0,2,6)$ y $G(3,2,6)$.

b) $x=0 \quad \forall y,\forall z$ $x=3 \quad \forall y,\forall z$ $y=0 \quad \forall x,\forall z$

$y=2 \quad \forall x,\forall z$ $z=0 \quad \forall x,\forall y$ $z=6 \quad \forall x,\forall y$

5. $-9x-y-7z+12=0$**.** Si P y Q son los extremos de un vector paralelo al vector $\bar{n}=(-1,2,5)$ entonces el problema admite "infinitas" soluciones.

6. $-8x+14y-5z-31=0$

7. a) $\begin{cases} x=s+t \\ y=2s \\ z=s+3t \end{cases} \quad s,t\in\Re$ b) $3x-y-z=0$

8. a) $\alpha=-2$ b) $\alpha=4$ $d=\dfrac{3}{\sqrt{24}}$

9. $-5x+y-2z-4=0$

10. $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{2\pi}{3}$

11. $\dfrac{6}{\sqrt{594}}$

12. a) *V*. Las coordenadas del punto *D* satisfacen la ecuación del plano determinado por los puntos *A, B* y *C*. También puede justificarse a través del producto mixto.

b) *F*. Se trata de un plano proyectante sobre el plano coordenado *XY* que contiene al eje *Z*.
c) *V*. El producto de dos factores es igual a cero cuando al menos uno de los mismos es igual a cero. La ecuación representa un par de planos no paralelos ni coincidentes que se interceptan en una recta.
d) *F*. La distancia al origen de coordenadas es igual a $\frac{2}{\sqrt{38}}$
e) *F*. Las ecuaciones dadas son equivalentes, es decir tienen el mismo conjunto solución. Por lo tanto representan a un mismo plano.
f) *F*. Los puntos están alineados, es decir pertenecen a una misma recta. Por lo tanto existen "infinitos" planos que los contienen.
g) *V*. El producto de tres factores es igual a cero cuando al menos uno de los mismos es igual a cero.
h) *V*. El vector determinado por los puntos $A(3,2,-7)$ y $B(5,-4,9)$ es perpendicular al plano y el punto medio $M(4,-1,1)$ satisface la ecuación.
i) *V*. El plano es paralelo al coordenado *XY*, por lo tanto todos sus puntos tienen la tercera coordenada constante. Siendo $A(-4,2,9)$ un punto del plano, su ecuación es $z = 9$ cualesquiera sean x e y.
j) *V*. Surge inmediatamente de escribir las ecuaciones de los planos y sus trazas.
k) *V*. Las coordenadas del punto P y las coordenadas de todos los puntos del eje Y satisfacen la ecuación dada.

13. 21

14. 20

15. es un plano de ecuación $x + y + z - 6 = 0$.