GUIA DE ESTUDIO Nº 4: *"LA RECTA EN EL ESPACIO"*

Esta guía tiene la intención de ayudarte en el aprendizaje de los contenidos desarrollados en el material de estudio *"La recta en el espacio. Problemas de rectas y planos" (autor: Ing. Ricardo Sagristá).* Tales contenidos corresponden a la Unidad 6 del Programa Analítico de la Asignatura.

UNIDAD 6 *"Geometría Lineal del Espacio"*
6.6. La recta en el espacio. Ecuación vectorial. Ecuaciones paramétricas. Coeficientes directores y cosenos directores. La recta como intersección de dos planos. Pasajes de una forma a otra.
6.7. Paralelismo y ortogonalidad entre rectas y planos.
6.8. Distancia de un punto a una recta.
6.9. Distancia entre rectas alabeadas.
6.10. Haz de planos.

En esta unidad continuarás aplicando el Álgebra Vectorial a la Geometría Analítica para:

- ***obtener diferentes ecuaciones de una recta en el espacio***
- ***estudiar algunas propiedades sencillas de las rectas***
- ***resolver problemas de recta y plano.***

Cuando avances con el cursado de otras asignaturas encontrarás la combinación del Álgebra Vectorial con otros métodos del Cálculo (Análisis Matemático). Conviene que recuerdes que en ese contexto:

Una recta en el espacio constituye un caso particular de curva (concepto que se definirá oportunamente).

En las actividades propuestas se presentan problemas (numerados del 1 al 23), algunas de cuyas respuestas se encuentran al final de la guía.

❖ ***Actividad 1:***

- Realiza la lectura del material didáctico hasta la página 16 inclusive, donde se presentan diferentes formas de las ecuaciones de una recta en el espacio.

- Resuelve:

1. Una recta tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \qquad t \in \Re \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

a) Escribe las coordenadas de dos puntos pertenecientes a la misma.
b) Explica por qué el punto de coordenadas $(10,1,10)$ no pertenece a la recta.
c) Escribe las coordenadas de los puntos de la recta que se encuentra a $\sqrt{46}$ unidades del origen de coordenadas.
d) Obtiene la forma canónica o simétrica y expresa luego la recta como intersección de dos planos proyectantes.

e) Escribe las ecuaciones de las rectas que resultan de proyectar la recta dada sobre cada uno de los planos coordenados.

2. Escribe ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $(2,3,-4)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x-4y+2z=8$.

3. a) Obtiene ecuaciones paramétricas de la recta $\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ x+4y-2z=8 \end{cases}$.

b) Halla las coordenadas del punto donde la recta corta al plano coordenado XZ.

❖ ***Actividad 2:***

- Continúa con la lectura de los párrafos:
  2.6. Ángulo entre dos rectas, condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas.
  2.7. Condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre recta y plano.
  2.8. Ángulos entre recta y plano.

- Resuelve:

Atención:

En los ejercicios *5* y *6* hay ecuaciones de rectas que *parecen ser* de la forma canónica o simétrica. *¡Sin embargo no es así!.* Realiza transformaciones convenientes para que las ecuaciones resulten tener efectivamente esa forma.

4. Halla el ángulo agudo que determinan las rectas:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-4=0 \\ 3x+2y-z+7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 4x-y+3z+7=0 \end{cases}$$

5. Verifica que las rectas:

a) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-4y+2z+12=0 \end{cases}$ y $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{3y+4}{-3}=\dfrac{9-z}{3}$ son paralelas.

b) $\begin{cases} 2x+y-2z+10=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}$ y $\dfrac{4-x}{4}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+11}{2}$ son ortogonales.

6. Verifica que el plano de ecuación $3x-8y+2z=8$ contiene a la recta de ecuaciones $\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{2y-2}{11}=\dfrac{z-5}{7}$.

7. Determina el valor de a para que el plano $x+y-2z=5$ y la recta $\dfrac{x-1}{3a}=\dfrac{y-2}{a+1}=\dfrac{z-5}{a+2}$ sean paralelos y calcula la distancia entre ambos.

8. Dado el plano $x+2y-z=4$, determina el valor de a y b para que la recta $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{a+1}=\dfrac{z-4}{2b}$ sea perpendicular al plano.

9. Halla el ángulo formado por la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{5}$ y el plano $2x+y-z=5$.

❖ ***Actividad 3:***

- Continúa con la lectura de los párrafos relativos a *Problemas de intersección*:
  2.9.1. Intersección de rectas en el espacio.
  2.9.2. Intersección de rectas y planos.

- Resuelve:

10. Verifica que la recta de ecuaciones $\begin{cases} x=1+u \\ y=2+u \\ z=-3 \end{cases}$; $u\in\Re$ es ortogonal al plano $\begin{cases} x=2+t-s \\ y=1-t+s \\ z=2+t+2s \end{cases}$; $t,s\in\Re$ y encuentra las coordenadas del punto de intersección.

***** Ayuda:
Convierte las ecuaciones paramétricas del plano en una ecuación general. Sumando miembro a miembro x e y se eliminan los parámetros s y t.

11. Halla las coordenadas del punto simétrico a $P(1,1,1)$ respecto del plano $x-2y+3z=0$. Controla el resultado calculando la distancia de P y del punto simétrico a P, al plano.

***** Ayuda:
El punto de intersección entre el plano y la recta perpendicular (al plano) que contiene a P es el punto medio entre P y su simétrico.

12. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=-2-t \end{cases}$; $t\in\Re$ y $\begin{cases} x=17+3s \\ y=4+s \\ z=-8-s \end{cases}$; $s\in\Re$ y obtiene luego una ecuación del plano que determinan.

❖ ***Actividad 4 :***

- Lee atentamente los párrafos relativos a *Problemas de distancia*:
  2.10.1. Distancia de un punto a una recta en el espacio.
  2.10.2. Distancia entre dos rectas alabeadas.
  2.10.3. Condición de coplanaridad de rectas en el espacio.

- Resuelve:

13. Halla la distancia del punto $P(1,4,5)$ a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3}$ y encuentra las coordenadas del punto de la recta que se encuentra a dicha distancia.

14. Calcula la distancia entre el par de rectas paralelas del ejercicio 5 a).

15. Dadas las rectas $\begin{cases} x = k + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases}$

a) Determina *k* para que resulten coplanares.
b) Para dicho valor de *k* halla una ecuación del plano que determinan y las coordenadas del punto de intersección.

16. a) Halla la distancia entre las rectas $r_1)\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ y $r_2)$ determinada por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(-2,2,6)$.

b) Explica cómo podrías determinar las coordenadas de los puntos $A \in r_1$ y $B \in r_2$ de modo que el módulo del vector $\overline{AB}$ sea igual a la distancia entre r_1 y r_2.

❖ ***Actividad 5:***

- Continúa con la lectura de *Haz de planos*, analizando únicamente el caso en que los planos se interceptan en una recta.

- Resuelve:

17. Determina una ecuación del plano π que contiene al punto $P(6,7,0)$ y a la recta $r)\begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$

18. Halla una ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano $\pi)\ x + y - z = 1$, siendo $r)\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{5}$.

19. Encuentra una ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 7 = 0 \\ 5x + 4y + 7z + 1 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $x - y + z = 0$.

❖ ***Actividad 6:***

Resuelve los siguientes problemas:

20. Encuentra una ecuación de la recta *L* que contiene al punto $P(-2,3,4)$ y es ortogonal a $r_1)\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -7 + 5t \end{cases} ;\ t \in \Re$ y a $r_2)\begin{cases} x = -2 + 4s \\ y = 3 - 2s \\ z = 3 + t \end{cases} ;\ s \in \Re$.

21. Halla una ecuación de la recta que contiene al punto $P(1,2,3)$ y se intercepta con las rectas de ecuaciones $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ y $\begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$

22. Escribe unas ecuaciones de la recta que contiene al punto $M(-1,2,-3)$, es perpendicular al vector $\bar{v}=(6,-2,-3)$ y se corta con la recta $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$.

23. Los puntos $A(1,-2,4)$, $B(3,1,-3)$ y $C(5,1,-7)$ son los vértices de un triángulo.

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a al altura trazada por el vértice *B* al lado opuesto.

b) ¿En qué intervalo tiene que variar el parámetro para generar los puntos de la altura?

❖ ***Trabajo Práctico:***
(Puede ser realizado en grupo de no más de cuatro integrantes).

- Consulta distintos textos (propios o disponibles en Biblioteca) para seleccionar 5 (cinco) nuevos problemas de recta y plano. Si lo deseas puedes recurrir también a alguna página de Internet.
- Resuelve los problemas elegidos.
- Realiza tu presentación por escrito consignando los datos de la/s fuente/s consultada/s (en el caso de libros, indica: *autor*, *título*, *editorial*, *año de edición*).

❖ **RESPUESTAS**

1. c) $P(1,3,6)$ y $Q\left(\dfrac{29}{7},\dfrac{33}{7},-\dfrac{18}{7}\right)$

3. b) $(4,0,-2)$

7. $a=\dfrac{3}{2}$ **;** $dist=2\sqrt{6}$

8. $a=9$ y $b=-\dfrac{5}{2}$

9. $\alpha=arcsen\left(\dfrac{\sqrt{198}}{198}\right)$

10. $\mathrm{I}(1,2,-3)$

11. $\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{11}{7},\dfrac{1}{7}\right)$

12. $P(2,-1,-3)$

13. $d=\sqrt{\dfrac{16}{11}}$ **;** $Q\left(\dfrac{23}{11},\dfrac{40}{11},\dfrac{51}{11}\right)$

15. $k=-6$; $x+y+3z=0$; $\mathrm{I}(4,5,-3)$

17. $\pi)\ -13x+11y-7z+1=0$

18. $\begin{cases} 2x-3y+z+3=0 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

19. $23x+24y+z+31=0$

20. $L)\begin{cases} x=-2+13t \\ y=3+22t \qquad t\in\Re \\ z=4-8t \end{cases}$

21. La recta es la intersección de los planos que determina el punto P con cada una de las rectas dadas.

22. $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=2+3t \qquad t\in\Re \\ z=-3-6t \end{cases}$