Notas de clase

Este material está sujeto a correcciones, comentarios y demostraciones adicionales durante el dictado de las clases, no se recomienda su uso a aquellos alumnos que no concurran a las mismas

Prof. Nora Arnesi

Experimentos aleatorios

- ✓ *Es posible repetir cada experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones*
- ✓ *Aunque en general no podemos indicar cuál será un resultado particular, podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento*
- ✓ *Cuando el experimento se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo con el cual analizar el experimento.*

Recordar!!

Al describir los diversos experimentos, se debe especificar no sólo el procedimiento que se realiza sino también lo que estamos interesados en observar.

Espacio muestral

Dado un experimento ε , definimos el espacio muestral como el conjunto de todos los resultados posibles e imaginables de ε .

Según el número de resultados posibles :

- Finito
- Infinito numerable
- Infinito no numerable

Sucesos

Un suceso A -respecto a un espacio muestral S asociado con un experimento ε- es simplemente un conjunto de resultados posibles. En terminología de conjuntos, un suceso es un subconjunto del espacio muestral S.

S y Ø también son sucesos

Combinación de sucesos

- *Si A y B son sucesos, $A \cup B$ es el suceso que ocurre si A o B (o ambos) ocurren*
- *Si A y B son sucesos, $A \cap B$ es el suceso que ocurre sí y solo sí A y B ocurren.*
- *Si A es un suceso,* $\overline{\mathrm{A}}$ *es el suceso que ocurre si y sólo sí A no ocurre.*
- *Si $A_1, \ldots A_n$ es cualquier colección finita de sucesos, entonces* $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A_i}$ *es el suceso que ocurre sí y sólo sí al menos uno de los sucesos ocurre.*
- *Si $A_1, \ldots A_n$ es cualquier colección finita de sucesos, entonces* $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A_i}$ *es el suceso que ocurre sí y sólo sí todos los sucesos A_i ocurren.*
- *Idem sucesión infinita numerable*

Mutuamente excluyentes

Se dice que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos.

$$A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo: *se prueba un artefacto electrónico y se anota el tiempo total de uso t, supongamos que* $\{t/t \geq 0\}$

$A=\{t/t<100\}$ $B=\{t/50 \leq t \leq 200\}$ $C=\{t/t>150\}$

Encontrar:

$A \cup B$

$A \cup C$

$B \cup C$

$A \cap B$

$A \cap C$

$B \cap C$

Asignando probabilidades

Una de las características básicas del concepto de “experimento” es que no se sabe qué resultado particular se obtendrá al realizarlo. Es decir, si A es un suceso asociado al experimento no se puede indicar con certeza si ocurrirá o no. Por lo tanto resulta de interés tratar de asociar un número con el suceso A que mida de alguna manera la posibilidad de que A ocurra.

Frecuencia relativa

Para motivar el enfoque adoptado como solución al problema anterior supóngase que se repite el experimento ε n veces y sean A y B dos sucesos asociados con ε. Sean n_A y n_B el número respectivo de veces que el suceso A y el suceso B ocurrieron en las n repeticiones

Definición

La frecuencia relativa del suceso A en las n repeticiones del experimento ε se define como : $f_A = n_A/n$ y cumple las siguientes propiedades:

- ✓ $0 \leq f_A \leq 1$
- ✓ $f_A = 1$ sí y sólo sí A ocurre cada vez en las n repeticiones
- ✓ $f_A = 0$ sí y sólo sí A nunca ocurre en las n repeticiones
- ✓ Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente $f_{AUB} = f_A + f_B$
- ✓ f_A basada en las n repeticiones del experimento se estabiliza en torno al valor P(A) cuando n tiende a infinito (realidad empírica)

Enfoque frecuencial

Repetir el experimento un gran número de veces, calcular la frecuencia relativa y usar ese número para asignar la P(A).

- ¿cuán grande deberá ser el número de repeticiones?
- Lo que se busca es un medio de obtener un número sin recurrir a la experimentación
- ¿Cómo debe ser ese número para considerarse satisfactorio? Naturalmente, si se realizaran un gran número de repeticiones la frecuencia relativa debería dar cercana a dicho valor.

Definición

Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado a dicho experimento. Con cada suceso A asociamos un número real, designado P(A) (probabilidad de A) que satisfaga las siguientes condiciones:

- ✓ $0 \leq P(A) \leq 1$
- ✓ $P(S) = 1$
- ✓ Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Si $A_1, \ldots A_\infty$ son sucesos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces:
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\infty)$ (a partir de esta se deduce para cualquier n finito)

Teoremas

- Si Ø es el conjunto vacío, entonces P(Ø)=0
- Si $\overline{A}$ es el suceso complementario de A, entonces $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- Si A y B son dos sucesos cualesquiera entonces $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
- Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

¿Cómo calcular P(A)?

- Se establece para cada suceso A, asociado con el espacio muestral de un experimento, un número P(A) que satisface los axiomas. Sin embargo es necesario hacer ciertas suposiciones adicionales que conduzcan a un método para evaluar dichas probabilidades. Si las suposiciones no están garantizadas se debe recurrir a la experimentación para aproximar la P(A) de los datos reales.
- Recordar que f(A) no es lo mismo que P(A)

Espacio muestral finito

- Se considera el caso en que el espacio muestral consta de un número finito de elementos $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$
- A fin de caracterizar P(A) en este modelo se considera el suceso que está constituido por un solo resultado, $A=\{a_i\}$
- A cada uno de los sucesos elementales $\{a_i\}$ se le asigna un número p_i que satisface: