- (a) $p_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots k$
- (b) $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$

Es evidente que como $\{a_i\}$ es un suceso, estas condiciones deben de estar de acuerdo con las postuladas para las probabilidades de sucesos en general.

- Si el suceso A está formado por r resultados, con $1 \leq r \leq k$, es decir
- $A=\{a_{j1},a_{j2},\ldots,a_{jr}\}$ donde $j1,j2,\ldots jr$ representan cualquier subíndice r de 1,…,k se deduce que $P(A)= p_{j1}+\ldots+p_{jr}$ [*]

Resumen: la asignación de probabilidades p_i a cada uno de los sucesos elementales $\{a_i\}$, sujeto a las condiciones (a) y (b), determina de un modo único la $P(A)$ para cada suceso $A \subset S$, en donde $P(A)$ está dado por [*]

Resultados igualmente probables

- Si los k resultados son igualmente probables, se deduce que cada $p_i=1/k$, porque $p_1+\ldots+p_k=1 \longrightarrow kp_i=1$ para todo i
- Si el suceso A consta de r resultados

$$P(A)= r/k$$

El modo de evaluar P(A) se indica:

P(A)= (#casos favorables a A) / (# posibles)

Pensemos!

Supongamos que tenemos N objetos

$$a_1, a_2, \ldots . a_N$$

✓ Escoger al azar un objeto entre N, significa que cada uno de los objetos tienen la misma probabilidad de ser escogido:

$$P(a_i) = 1/N \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Recordar : debemos estar seguros de que todos los resultados son igualmente probables!!!!

- Escoger al azar dos objetos entre N significa que cada uno de los pares (sin considerar el orden) tiene la misma probabilidad de ser escogido que cualquier otro par
- Escoger al azar n objetos entre N ($n \leq N$) significa que cada n-upla tiene la misma probabilidad de ser escogida que cualquier otra n-upla

Probabilidad condicional

- Pensemos en un lote que está compuesto por:

  80 artículos sin defectos

  20 artículos defectuosos

Supongamos que elegimos dos artículos :

(a) Con sustitución

(b) Sin sustitución

Calculando probabilidades…

- Se definen los siguientes sucesos:

A={el primer artículo es defectuoso}

B={el segundo artículo es defectuoso}

- Si escogemos con sustitución
  P(A)=P(B)=1/5
- Si escogemos sin sustitución?

…deberíamos conocer si A ocurrió o no

....entonces?

Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento ε. Se indica con P(B/A) a la probabilidad condicional del suceso B dado que A ha ocurrido.

En el ejemplo : P(B/A)=19/99

Cada vez que calculemos P(B/A) vamos a calcular la P(B) en el espacio muestral reducido de A

Definición

Probabilidades condicionales:

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) \qquad P(B)>0$$

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) \qquad P(A)>0$$

Ayuda: pensemos en la frecuencias relativas!

$n_{A\cap B} / n_A$ *representa la frecuencia relativa de b entre esos resultados en que A ocurrió*

Recordar!!

Hay dos maneras de calcular la probabilidad condicional P(B/A)

- ✓ directamente considerando la probabilidad de B en el espacio muestral restringido A
- ✓ Usando la definición, donde $P(A \cap B)$ y P(B) se calculan con respecto al espacio muestral original.

Otra forma de escribir la probabilidad condicional...

$$P(A \cap B)= P(B/A)P(A)$$

Lo que equivale a

$$P(A \cap B)= P(A/B)P(B)$$

Conocido como....

teorema de la multiplicación de probabilidades

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1,A_2)\ldots P(A_n/A_1,A_2,\ldots A_{n-1})$

Ver casos especiales pág:38

Recordar….

Se consideró que dos sucesos A y B que no pueden ocurrir simultáneamente se los denomina mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$) y…

- ✓ se indicó que si A y B son m.e. $P(A/B)=0$, porque B impide la ocurrencia de A.
- ✓ Además si $A \subset B$, $P(B/A)=1$

En estos casos sabiendo que B ocurrió, hay una información precisa referente a la probabilidad de la ocurrencia de A.

Sucesos independientes

Sin embargo hay muchos casos en los cuales se sabe que si un suceso B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de A, en esos casos se dice que A y B son sucesos independientes.

¿Qué sucede si son independientes?

$$P(A/B)= P(A \cap B)/P(B) = P(A)$$
$$P(B/A)= P(A \cap B)/P(A) = P(B)$$

Sin embargo utilizar esta forma de comprobación requiere que P(A) y P(B) sean mayores que cero. Para subsanar este inconveniente se puede considerar :

$$P(A \cap B)= P(B/A)P(A)$$
$$P(A \cap B)= P(A/B)P(B)$$

...suponiendo que las probabilidades condicionales sean iguales a sus probabilidades no condicionales correspondientes resulta:

$$P(A \cap B)= P(B/A)P(A) =P(B)P(A)$$
$$P(A \cap B)= P(A/B)P(B) =P(A)P(B)$$

Sucesos independientes

Por definición, dos sucesos A y B son independientes si y sólo si:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A)$$

Se dice que tres sucesos A, B y C son mutuamente independientes sí y sólo si todas las condiciones siguientes se mantienen:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A) \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Sucesos mutuamente independientes

Los n sucesos $A_1, A_2,\ldots,A_n$ son mutuamente independientes sí y sólo si tenemos para k=2,3,…,n

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{i1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_{i2}) \ldots .\mathrm{P}(\mathrm{A}_{ik})$$

Hay 2^n-n-1 condiciones anotadas

Partición del espacio muestral

Se dice que los sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ representan una partición del espacio muestral S si:

- ✓ $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
- ✓ $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$
- ✓ $P(B_i) > 0$ para todo i
- ✓ Es decir cuando se realiza el experimento ocurre uno y sólo uno de los sucesos B_i

Partición del espacio muestral y un suceso de interés….

Sea A un suceso con respecto a S y sea

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición de S.

A puede descomponerse como la unión de sucesos mutuamente excluyentes

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup \ldots \cup A \cap B_k$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_k)P(B_k)$$

Teorema de Bayes

Sean $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición del espacio muestral S. Sea A un suceso asociado a S, aplicando la def. de probabilidad condicional se puede escribir:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(A/B_j)P(B_j)} \qquad j = 1, \ldots, K$$