Notas de clase

Este material está sujeto a correcciones, comentarios y demostraciones adicionales durante el dictado de las clases, no se recomienda su uso a aquellos alumnos que no concurran a las mismas

Prof. Nora Arnesi

Variables aleatorias continuas

Sea $X: S \rightarrow R$,

si R_x es ***infinito no numerable*** *decimos que X es una* ***variable aleatoria continua***

Variables aleatorias continuas

- Se dice que X es una variable aleatoria continua si existe una función f, llamada *función de densidad de probabilidad (fdp)* de X, que satisface las siguientes condiciones:

(a) $f(X) \geq 0 \quad \forall x$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(X)dx = 1$

(c) Para cualquier a, b, tal que $-\infty < a < b < +\infty$

tenemos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Función de distribución acumulada

Sea X una v.a. continua, llamamos Función de distribución acumulada a

$$F: R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

donde f es la fdp asociada a X

Características

- F es continua
- F es derivable en los puntos de continuidad de f. Además $F´(x)=f(x)$
- F es no decreciente

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Distribución Uniforme

- Supongamos que X es una variable aleatoria continua que toma todos los valores en el intervalo $[a, b]$, en donde a y b son finitos. Si la *fdp* de X está dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b,$$
$$= 0 \qquad \text{en otro caso}$$

decimos que X se distribuye uniformemente en el intervalo $[a, b]$

Valores característicos

- Verifique que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\,dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Algunas consideraciones

- Una v.a. uniformemente distribuida tiene una *fdp* que es una constante en el intervalo de definición. A fin de satisfacer la condición de cierre esta constante debe ser igual al recíproco de la longitud del intervalo. *¿Puede verificarlo?*
- Una v.a. distribuida uniformemente es la analogía continua a los resultados igualmente probables. Para cualquier intervalo $[c, d]$, en donde $a \le c < d \le b$, $P(c \le X \le d)$ es la misma para todos los subintervalos que tienen la misma longitud. *……¿y …cuál es?*

Ejemplo

Se puede suponer que la dureza, H de una muestra de acero (medida en escala Rockwell) es una variable aleatoria continua distribuída uniformemente sobre [50,70]. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f(h) &= \frac{1}{20} \qquad 50 < h < 70 \\
&= 0 \qquad \textit{para cualquier otro valor}
\end{aligned}
$$

Ejemplo (continuación)

Determine la $P(55 < X < 65)$

Ejercicio:

Supóngase que X se distribuye U [-α, +α], con $\alpha > 0$.

Determine α de modo que satisfaga:

$P(X > 1)=1/3$

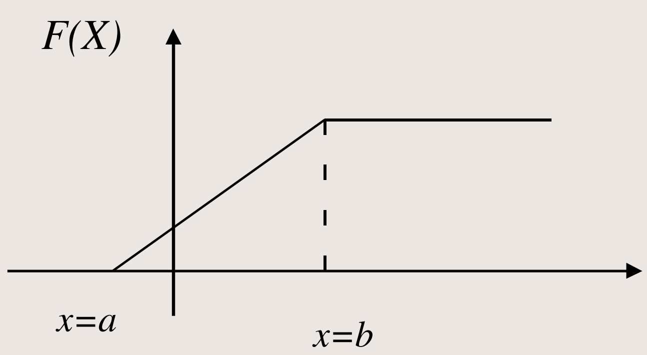
Función de distribución acumulada de una variable distribuida uniformemente

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

$$= 0 \qquad si \quad X < a$$

$$= \frac{x-a}{b-a} \qquad si \quad a \le x \le b$$

$$= 1 \qquad si \quad x \ge b$$



La distribución exponencial

Una variable aleatoria continua cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} si\ x > 0 \\ 0 \qquad en\ otro\ caso \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

se dice que tiene una distribución exponencial de parámetro α

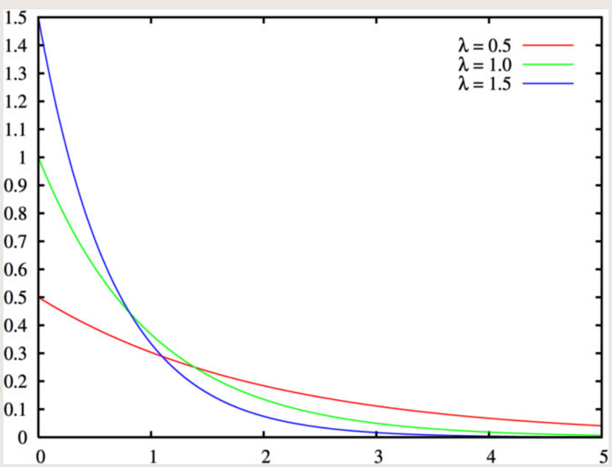
$$X \sim \exp(\alpha)$$

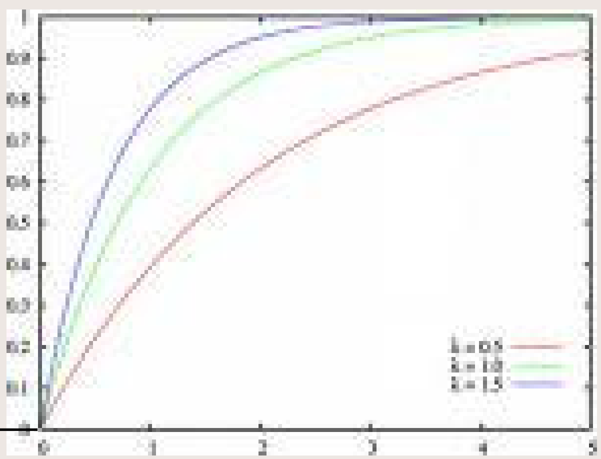
A pensar!!!! Verifique la condición de cierre

Función de distribución acumulada

- Sea X v.a.c. con distribución exponencial

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt=0 & si\ x<0\\ \displaystyle\int_{0}^{x}\alpha e^{-\alpha t}dt=1-e^{-\alpha x} & si\ x>0\end{cases}$$





Falta de memoria!!!

- **Propiedad de la falta de memoria**

$$P\left(X > t + a / X > a\right) = P\left(X > t\right) \quad \forall\, t, a \quad \in \mathbb{R}^{+}$$

Dem)

$$P\left(X > t + a / X > a\right) = \frac{P\left(X > t + a,\, X > a\right)}{P\left(X > a\right)} = \frac{P\left(X > t + a\right)}{P\left(X > a\right)} =$$

$$= \frac{1 - P\left(X < t + a\right)}{1 - P\left(X < a\right)} = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(t+a)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\alpha t}\right)} = \frac{e^{-\alpha t}.e^{-\alpha a}}{e^{-\alpha a}} = e^{-\alpha t}$$

Valores característicos

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x\,\alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

$$V(X) = \int_{0}^{+\infty} \left(x - E(x)\right)^{2} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^{2}}$$

Distribución normal

- La variable aleatoria X, que toma todo los valores reales $-\infty < x < \infty$, tiene una distribución normal (o Gaussiana) si su fdp es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\textit{donde los parámetros } \mu \textit{ y } \sigma \textit{ deben satisfacer:}$$

$$-\infty < \mu < +\infty \quad ; \quad \sigma > 0$$

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Propiedades

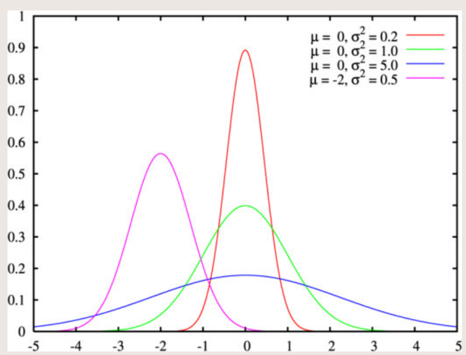
La distribución normal sirve como una buena aproximación a una gran cantidad de distribuciones

Propiedades:

a) $f(x) \geq 0$

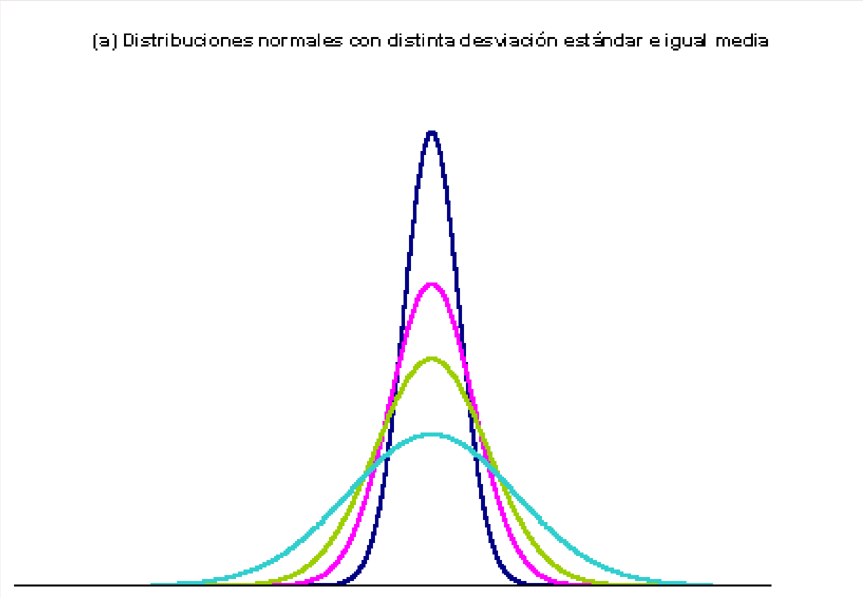
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad Ayuda: t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

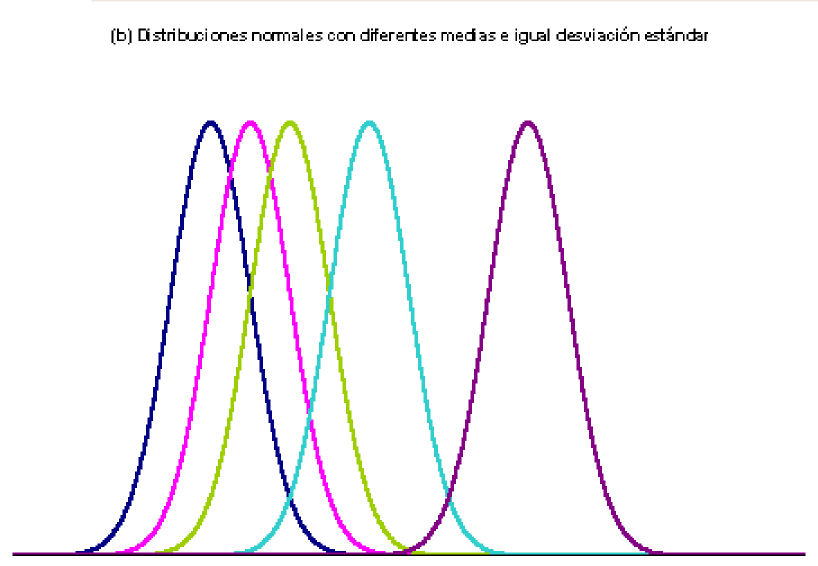
c)



Forma de campana. Simétrico con respecto a μ y con puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$

Ejemplos


(a) Distribuciones normales con distinta desviación estándar e igual media


(b) Distribuciones normales con diferentes medias e igual desviación estándar

Valores característicos

$$E(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} \qquad Ayuda: z=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad dx=\sigma dz$$

$$\boxed{E(X)=\mu}$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

$$V(X)=\left(\sigma^2-\mu^2\right)-\mu^2$$

$$\boxed{V(X)=\sigma^2}$$

$$\sqrt{V(X)}=\sigma \quad desvío\ estándar$$

Normal estandarizada

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad entonces \quad z = \frac{(X-\mu)}{\sigma} \quad \sim N(0,1)$$

Por lo tanto:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

donde

$$\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{(b-\mu)/\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}} dy \quad ; \quad \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{(a-\mu)/\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}} dy$$

en general

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{\frac{-z^2}{2}} dy$$

Tabulación

$$Z \sim N(0,1)$$

luego

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2}$$

Esta integral no puede evaluarse por los métodos ordinarios. Para su resolución se utilizan los métodos de integración numérica, y por suerte!!! Las $P(X \le s) = \phi(s)$ están tabuladas!!!

Función de una variable aleatoria

El radio en milímetros de los discos que produce cierta máquina se considera una variable aleatoria X.

Supongamos que ahora se quiere considerar el área de dichos discos, es decir πX^2 entonces $Y = \pi X^2$ es otra variable aleatoria

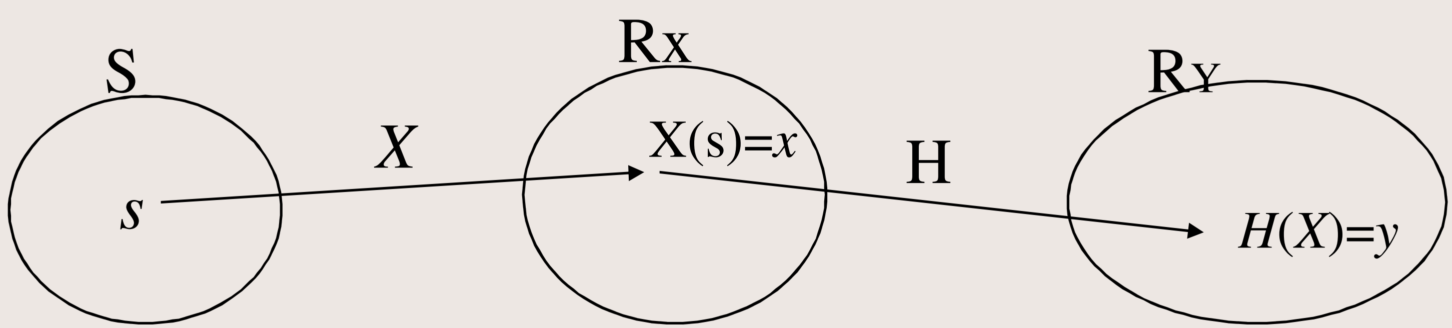
$$H\left(X\right) = \pi X^2$$

$$X \rightarrow Y$$

Se quiere hallar la distribución $Y=H(X)$ en función de la distribución de la variable original X

Extensión del concepto de "sucesos equivalentes"

Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado a dicho experimento. Sea X una v.a. definida en S. Supongamos que y=H(x) es una función real de x. Entonces $Y=H(X)$ es una variable aleatoria puesto que para cada $s \in S$ se determina un valor de Y, sea $y=H[X(s)]$.



Definición

R_X: Recorrido de X, es el conjunto de valores posibles de X

R_Y: Recorrido de Y, es el conjunto de valores posibles de Y

Sea C un suceso (subconjunto) asociado con el recorrido de Y, R_Y. Se define el suceso B $\subset$ R_X de forma:

$$B = \left\{ x \in R_X : H\left(x\right) \in C \right\}$$

B es el conjunto de los valores de X tales que $H(x) \in C$

Si B y C están relacionados de esta manera se denominan sucesos equivalentes

Definición

- Sea X una v.a. en el espacio muestral S. Sea R_X el recorrido de X. Sea H una función real y consideremos la variable aleatoria $Y=H(X)$ con recorrido R_Y. Para cualquier suceso C contenido en R_Y se define

$$P(C) = P\left[\left\{x \in R_X : H(x) \in C\right\}\right]$$

La probabilidad de un suceso asociado con el recorrido de Y está definida como la probabilidad del suceso equivalente (en función de X)

Probabilidad de sucesos equivalentes........

$$P(C) = P\left[\left\{x \in R_X : H(X) \in C\right\}\right] = P\left[\left\{s \in S : H(X(s)) \in C\right\}\right]$$

Ejemplo:

Sea X **una variable aleatoria con fdp**

$$f(x) = e^{-x} \qquad x > 0$$

H(x)=2x+1.   como$R_X = \{x / x > 0\} \therefore \quad R_Y = \{y / y > 1\}$

Continuamos con el ejemplo…

- Supongamos que se define $C = \{Y \geq 5\}$
- A qué suceso es equivalente? (en R_X)
- Cuál es la P(C)?

$$P(C) = P\{Y \geq 5\} = \frac{1}{e^2}$$

Caso 1:

- Si X es una variable discreta e Y=H(X), entonces se deduce que Y es también v.a. discreta.
- Si es posible numerar los valores que asume X, también es posible numerar los valores que asume Y:

$$X, \quad x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\ldots\ldots \, entonces \; y_1 = H\left(x_1\right), \ldots y_n = H\left(x_n\right)$$

Probabilidades de Y

Ejemplos:

X: -1,0,1 **con probabilidades** 1/3,1/2,1/6

a) Y=3X+1

b) $Y=X^2$

$$y_i = H(x_i) \quad i = 1,2,....n,.......$$

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = P(X = x_i) = p(x_i)$$

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = P(X = x_{i1}) + P(X = x_{i2}) + ... = p(x_{i1}) + p(x_{i2}) + ...$$

Caso 2

- X es una variable aleatoria continua
- Y es discreta (a)
- Y es continua (b)

(a) X toma todos los valores reales e Y se define: $Y = -1$ si $X < 0$; $Y = 1$ si $X \geq 0$

Continua, continua.....

(b) X es v.a.continua con fdp

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \textit{en otro caso}$$
$$H(X) = 3X + 1$$

1.*Obtener* $G(y)$

2.*Diferenciar* $G(y)$ *con respecto a* y*, para obtener* $g(y)$

3.*Determ. los valores de* y *para* $g(y) > 0$

Teorema

- Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$, ***sea*** y=*H(x) una función estrictamente monótona y derivable para todo x.* Luego la variable aleatoria continua Y=H(X) tiene como función de densidad $f(y)$ a:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \quad donde\ x = H^{-1}(y)$$

...y si H no es estrictamente creciente???

- Ejemplo: Determinar la función de densidad de $Y = 4 - X^2$ si $X \sim U[-1,1]$

donde $H(x) = 4 - x^2$ no es estrictamente monótona en $R_X = [-1,1]$

RTA:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{4-y}} & si\ 3 \le y \le 4 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Esperanza de una función de variable aleatoria

- Si X es discreta, $y = H(x)$ (cualquiera)

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y P_Y(y) = \sum_{x \in R_X} H(x) P_X(x)$$

- Si X es continua, Y discreta

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y P(y) = \sum_{B \in \operatorname{Im}\left(H^{-1}\right)} \int_B H(x) f_X(x)\, dx$$

- Si X es continua, Y continua

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monótona creciente}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(x) \frac{dx}{dy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f_X(x)\, dx$$