FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática – Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

Ejercicios complementarios

1. Probar que si U y W son subespacios de un espacio vectorial finito dimensional V sobre un cuerpo K, entonces $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

2. Demostrar que si A es una matriz de orden n, entonces el polinomio característico de A, $p(\lambda)$, tiene coeficiente principal $(-1)^n$.

3. Si D es una matriz diagonal de orden n entonces $dim(\mathcal{N}(D))$ es el número de entradas diagonales nulas en D.

4. Si A y B son matrices con entradas complejas de ordenes apropiados y el producto entre ellas está definido a partir del producto interno usual de vectores de $\mathbb{C}^n$, entonces:
   a) $(AB)^T = B^T A^T$
   b) $\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$
   c) $(AB)^H = B^H\ A^H$

5. Una matriz se dice *antihermitiana* si $A = -A^H$. Demostrar:
   a) A antihermitiana si y sólo si iA es hermitiana.
   Si A antihermitiana:
   b) los elementos diagonales son imaginarios y los elementos fuera de la diagonal en posiciones simétricas tienen misma parte imaginaria y parte real opuesta.
   c) Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x^H Ax \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
   d) Todos los autovalores de A son imaginarios.

6. Si U es una matriz unitaria entonces:
   a) U preserva productos internos
   b) $\|Ux\| = \|x\|$
   c) λ es autovalor de U entonces $|\lambda| = 1$.

7. Si una matriz N verifica $NN^H = N^H N$ entonces se llama *normal*. Demostrar que:
   a) Las matrices hermitianas, antihermitianas y unitarias son normales.
   b) Existen matrices normales que no son hermitianas, antihermitianas o unitarias.
   c) Si una matriz es triangular y normal entonces es diagonal.