Funciones Recursivas Primitivas

Pablo Verdes

LCC

1 de abril de 2016

Introducción

- Intentaremos construir modelos que nos permitan comprender los fundamentos del cálculo.
- ¿Qué significa **calcular**? Tomar ciertos datos, realizar una serie de pasos, y obtener un resultado. Es decir, **aplicar un algoritmo**.
- Estudiaremos una manera de descomponer cualquier cálculo matemático en procesos básicos.
- La teoría indica que basta encontrar un modelo para el cálculo sobre los **números naturales**.
- Esquema:
  1. Funciones numéricas
  2. Funciones base: cero, proyección, sucesor
  3. Operadores: composición, recursión
  4. Definición inductiva del conjunto de Funciones Recursivas Primitivas
- Para simplificar notación, de aquí en más usaremos la letra $\mathbb{N}$ para indicar a $\mathbb{N}_0$ (conjunto de los números naturales y el cero).

Funciones numéricas

Definición:

Llamaremos **función numérica** a toda función

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

- Convención: si $k = 0$, identificaremos a una función de cero variables con un número perteneciente a $\mathbb{N}$.
- Notación:
  - Elementos de $\mathbb{N}^k$: $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, X, Y, Z.
  - Cuando queramos remarcar el hecho de que una tupla tiene k componentes, utilizaremos un supra-índice y escribiremos X^k.
  - Valor que toma una función: $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $f(X)$, $f(X^k)$
  - Si el dominio de una función es $\mathbb{N}^k$, diremos que dicha función es de orden k y escribiremos $f^{(k)}$.

Funciones base

- Funciones cero

- Funciones proyección

- Función sucesor

Funciones base: definiciones

- Llamaremos **funciones cero** a las funciones

$$\begin{aligned} c^{(n)} : \mathbb{N}^n &\to \mathbb{N} \\ X &\mapsto c^{(n)}(X) = 0 \end{aligned}$$

- Llamaremos **funciones proyección** a las funciones

$$\begin{aligned} p_k^{(n)} : \mathbb{N}^n &\to \mathbb{N} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto p_k^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k \end{aligned}$$

- Llamaremos **función sucesor** a la función

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto s(x) = x + 1 \end{aligned}$$

Funciones base

- **Definición:** Llamaremos **funciones base** a las funciones cero, proyección y sucesor.

- Ahora veremos los operadores de composición y recursión, que nos permitirán combinar estas funciones base para obtener funciones más complejas.

Operador composición Φ

Definición:
Dadas una función numérica $f^{(n)}$ y n funciones numéricas de orden k, $\{g_i^{(k)}\}_{i=1}^{n}$, llamaremos operador **composición** al que construye la función numérica h dada por

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^k &\to \mathbb{N} \\ X &\mapsto h(X) = f(g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X)) \end{aligned}$$

Notación:

$$h = \Phi(f, g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

Operador composición Φ

Ejemplos:

- Funciones constantes:
  1. $uno^{(k)} = \Phi(s, c^{(k)})$
  2. $dos^{(k)} = \Phi(s, uno^{(k)}) = \Phi(s, \Phi(s, c^{(k)}))$
  3. $tres^{(k)} = \Phi(s, dos^{(k)}) = \Phi(s, \Phi(s, \Phi(s, c^{(k)})))$

- Funciones que suman un número fijo:
  1. $Mas1^{(1)} = s$
  2. $Mas2^{(1)} = \Phi(s, Mas1^{(1)}) = \Phi(s, s)$
  3. $Mas3^{(1)} = \Phi(s, Mas2^{(1)}) = \Phi(s, \Phi(s, s))$

- Función $doble(x) = x + x$?

Operador recursión R

Definición:
Dadas dos funciones numéricas $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$, llamaremos operador **recursión** R al que construye una nueva función numérica $f^{(k+1)}$ definida de la siguiente manera:

$$f(y, X^k) = \begin{cases} g(X^k) & \text{si} \quad y = 0 \\ h(y-1, X^k, f(y-1, X^k)) & \text{si} \quad y > 0 \end{cases}$$

Notación:

$$f = R(g, h)$$

Funciones Recursivas Primitivas (FRP)

Definimos inductivamente el conjunto de **Funciones Recursivas Primitivas (FRP)** como el menor conjunto tal que:

- Las funciones base pertenecen a FRP.
- Las funciones obtenidas aplicando un número finito de operaciones de composición (Φ) y recursión (R) sobre elementos de FRP también pertenecen a FRP.

Ejemplos

Son FRP las siguientes funciones:

1. $\Sigma(y, x) := y + x$ (suma)
2. $\Pi(y, x) := y \times x$ (producto)
3. $Fac(x) := x!$ (factorial)
4. $Exp(y, x) := x^y$ (exponencial, con la convención de que $0^0 = 1$)
5. (predecesor)

$$Pd(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. $\Sigma(y, x) := y + x \ \in FRP$

Veamos que Σ se puede escribir como recursión de FRP. Recordemos que

$$f(y, X^k) = \begin{cases} g(X^k) & \text{si} \ \ y = 0 \\ h(y-1, X^k, f(y-1, X^k)) & \text{si} \ \ y > 0 \end{cases}$$

Obs. que $k = 1$. Buscamos entonces $g^{(1)}, h^{(3)} \in FRP$ tales que:

$$\Sigma(y, x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \ \ y = 0 \\ h(y-1, x, \Sigma(y-1, x)) & \text{si} \ \ y > 0 \end{cases}$$

- Caso $y = 0$: $\quad \Sigma(0, x) = 0 + x = x = p_1^{(1)}(x) \ \Rightarrow \ g^{(1)}(x) = p_1^{(1)}(x)$
- Caso $y > 0$: $\quad \Sigma(y, x) = y + x = (y - 1 + x) + 1 = \Sigma(y-1, x) + 1 = s(\Sigma(y-1, x)) = s(p_3^{(3)}(y-1, x, \Sigma(y-1, x))) \ \Rightarrow \ h^{(3)} = \Phi(s, p_3^{(3)})$

Hemos probado que $\Sigma = R(p_1^{(1)}, \Phi(s, p_3^{(3)}))$, luego $\Sigma \in FRP$.

Ejemplos

5. $Pd \in FRP$

$$Pd(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; x = 0 \\ x - 1 & \text{si} \;\; x > 0 \end{cases}$$

Veamos que Pd se puede escribir como recursión de FRP. Recordemos que

$$f(y, X^k) = \begin{cases} g(X^k) & \text{si} \;\; y = 0 \\ h(y-1, X^k, f(y-1, X^k)) & \text{si} \;\; y > 0 \end{cases}$$

Obs. que $k = 0$. Buscamos entonces $g^{(0)}, h^{(2)} \in FRP$ tales que:

$$Pd(y) = \begin{cases} g & \text{si} \;\; y = 0 \\ h(y-1, Pd(y-1)) & \text{si} \;\; y > 0 \end{cases}$$

- Caso $y = 0$: $\quad Pd(0) = 0 = c^{(0)} \;\; \Rightarrow \;\; g^{(0)} = c^{(0)}$
- Caso $y > 0$:
  $Pd(y) = y - 1 = p_1^{(2)}(y-1, Pd(y-1)) \;\; \Rightarrow \;\; h^{(2)} = p_1^{(2)}$

Hemos probado que $Pd = R(c^{(0)}, p_1^{(2)})$, luego $Pd \in FRP$.

Función potencia

- Veremos ahora ciertas propiedades que serán útiles para encontrar nuevos miembros de la familia *FRP*.

- **Definición:** Dada una función $f^{(1)}$ definimos $F^{(2)}$, llamada **potencia de** f, del siguiente modo:

$$F(y,x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad y = 0 \\ f(F(y-1,x)) & \text{si} \quad y > 0 \end{cases}$$

  Notación: $F(y,x) = f^y(x)$.

- **Proposición:** $f \in FRP \Rightarrow F \in FRP$

  D/ Veamos que se puede escribir a F como recursión de *FRP*:
  $(y = 0) \qquad F(0,x) = x = p_1^{(1)}(x) \;\Rightarrow\; g^{(1)} = p_1^{(1)}$
  $(y > 0) \qquad F(y,x) = f(F(y-1,x)) =$
  $f(p_3^{(3)}(y-1,x,F(y-1,x))) \;\Rightarrow\; h^{(3)} = \Phi(f, p_3^{(3)})$
  Hemos mostrado que $F = R(p_1^{(1)}, \Phi(f, p_3^{(3)}))$.
  Dado que $f \in FRP$, concluimos que $F \in FRP$. $\square$

Función potencia: ejemplos

- Función **diferencia** $\hat{d}^{(2)}$:

$$\hat{d}(y,x) = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$$

Se trata de una resta entre números naturales que sólo se realiza cuando es posible. Notación alternativa: $x \dot{-} y$.

-

$$\text{(ejercicio)} \qquad \left.\begin{array}{r} \hat{d}(y,x) = Pd^{y}(x) \\ Pd(x) \in FRP \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{d}(y,x) \in FRP$$

- Análogamente se puede mostrar que $\Sigma^{(2)} \in FRP$, ya que se puede escribir como la potencia de la función sucesor: $\Sigma(y,x) = s^{y}(x)$.

Conjuntos Recursivos Primitivos (CRP)

- **Definición:** Dado un conjunto X, para cada subconjunto $A \subseteq X$ definimos su **función característica** $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x \in A \\ 0 & \text{si } \; x \notin A \end{cases}$$

- **Definición:** Diremos que $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es un **conjunto recursivo primitivo (CRP)** si su función característica

$$\chi_A : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$$

es una función recursiva primitiva.

- **Proposición:** Sean $k \in \mathbb{N}$ y $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$. Si A y B son CRP, entonces el complemento $\neg A$, la intersección $A \cap B$ y la unión $A \cup B$ son CRP.

  D/ Ejercicio.