El principio de inducción fuerte

1. Sea a_n la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},\ n \geq 4.$$

   Probar que $a_n \leq 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Observemos que los enteros 14, 15 y 16 se pueden escribir como sumas de 3's y 8's de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 14 &= 3 + 3 + 8, \\ 15 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3, \\ 16 &= 8 + 8. \end{aligned}$$

   Probar que, en realidad, todo entero $n \geq 14$ se puede escribir como una suma de 3's y 8's.

3. Probar que todo número natural $n \geq 2$ puede expresarse como producto de números primos. (Recordar que un entero $p \in \mathbb{Z}$ se dice *primo* si $p \neq \pm 1$ y sus únicos divisores son ± 1 y $\pm p$.)

4. Consideremos la *sucesión de Fibonacci*

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2.$$

   Probar que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

   Ayuda: los números $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

5. Los *números de Lucas* se definen recursivamente por

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1, \qquad L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ n \geq 2.$$

   a) Probar que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Concluir que $L_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.