

# Lógica

Dante Zanarini

LCC

10 de agosto de 2015

# Resumen

- 1 Introducción (burocracia)
- 2 Un poco de historia
- 3 Algunos conceptos básicos
- 4 Aplicaciones

# Outline

- 1 Introducción (burocracia)
- 2 Un poco de historia
- 3 Algunos conceptos básicos
- 4 Aplicaciones

- Dante Zanarini,
- Pablo Verdes,
- Pamela Viale,
- Marcos Pividori

- Dante Zanarini,
- Pablo Verdes,
- Pamela Viale,
- Marcos Pividori (el único que aprobó esta materia!)

# Organización

- Tres clases semanales de dos horas.
- Intentaremos fijar días para teoría y práctica, pero *puede fallar*.
- Una consulta semanal por cada docente.

# Organización

- Tres clases semanales de dos horas.
- Intentaremos fijar días para teoría y práctica, pero *puede fallar*.
- Una consulta semanal por cada docente.
- Lista de correo (**desde mañana, asumimos que todos están suscriptos**):

`https://listas.fceia.unr.edu.ar/cgi-bin/mailman/listinfo/logica`

- Página web:

`http://www.fceia.unr.edu.ar/lcc/r223/`

# Forma de evaluación

- Tres parciales.
- Para quedar regular: Promedio 6, con notas no menores a 4.
- Para promover práctica (de los temas evaluados): promedio 8, con notas no inferiores a 7.

**Promoción por parciales:** Si rendís antes de marzo, estás regular y tenés un parcial con nota 8 o más, no se evalúan los temas de ese parcial en el examen.

## **Examen final:**

Teoría + Práctica (si corresponde)



# ¿Qué es lógica?

Intentemos definirla.

# ¿Qué es lógica?

Intentemos definirla.

- 1 La capacidad de poder determinar razonamientos correctos
- 2 El estudio del razonamiento formal
- 3 Una secuencia de sentencias verificadas (o verificables)
- 4 Razonamiento, lo opuesto a la intuición
- 5 Deducir conclusiones a partir de premisas

# ¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *“Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones.”. P. D. Magnus, forall  $\chi$ , An introduction to formal logic*

# ¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *“Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones.”*. P. D. Magnus, forall  $\chi$ , *An introduction to formal logic*
- *“Logic is concerned mainly with two concepts: truth and provability.”*  
Gallier, *Logic For Computer Science, Foundations of Automatic Theorem Proving*

# ¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *“Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones.”*. P. D. Magnus, forall  $\chi$ , *An introduction to formal logic*
- *“Logic is concerned mainly with two concepts: truth and provability.”* Gallier, *Logic For Computer Science, Foundations of Automatic Theorem Proving*
- *“Symbolic logic is a mathematical model of deductive thought.”* H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*.

# ¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *“ The aim of logic in computer science is to develop languages to model the situations we encounter as computer science professionals, in such a way that we can reason about them formally.” Ryan - Hutt. Logic in computer science.*

# ¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *“The aim of logic in computer science is to develop languages to model the situations we encounter as computer science professionals, in such a way that we can reason about them formally.”* Ryan - Hutt. *Logic in computer science.*
  
- *“Mathematical logic is concerned with formalizing and analyzing the kinds of reasoning used in the rest of mathematics.”* Stephan Bilaniuk. *A problem course in mathematical logic.*

# ¿Por qué lógica?

- ¿Por qué tenemos una asignatura de lógica en la carrera?
- ¿Para qué nos sirve?
- ¿Cómo se relaciona con el resto de las asignaturas?



# Outline

- 1 Introducción (burocracia)
- 2 Un poco de historia**
- 3 Algunos conceptos básicos
- 4 Aplicaciones

# Grecia

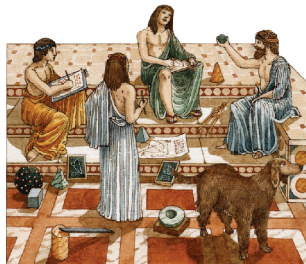
“Somos filósofos, nos hemos reunido  
a discutir y tomar un poco de vino”



# Grecia

“Somos filósofos, nos hemos reunido a discutir y tomar un poco de vino”

“Nos interesaría poder distinguir argumentos correctos de aquellos que no lo son, para así saber quién tiene razón”



# Grecia

“Somos filósofos, nos hemos reunido a discutir y tomar un poco de vino”

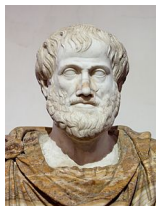
“Nos interesaría poder distinguir argumentos correctos de aquellos que no lo son, para así saber quién tiene razón”

“Es fundamental para nosotros, pues el que pierde, paga”



# Grecia

Aristóteles (~ 384AC - 322AC)



- La lógica de Aristóteles gira alrededor de un concepto fundamental: **la deducción**

*Una deducción es un discurso en el cual, habiendo supuesto algunos hechos, algo diferente se obtiene como resultado necesario a causa de la validez de los supuestos*

- Los trabajos de Aristóteles dominaron el estudio de la lógica hasta mediados del siglo XIX

## Leibniz (1646-1716), un visionario

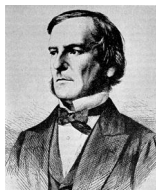
*La única manera de verificar nuestros razonamientos es que sean tan tangibles como los de la matemática, de modo que podamos encontrar nuestro error de un solo vistazo. Y cuando surgen diferencias entre las personas, podemos simplemente decir: Vamos a calcular, sin más preámbulos, a ver quién tiene la razón (The Art of Discovery, 1685)*



- Los principios de la lógica para Leibniz
  - 1 Todas nuestras ideas están compuestas por un pequeño número de ideas simples
  - 2 Las ideas complejas provienen de estas simples ideas a través de una uniforme y simple combinación, similar a la aritmética
- Los trabajos de Leibniz sobre lógica no fueron publicados hasta mucho tiempo después

# Lógica como álgebra

Mediados del siglo XIX - principios del siglo XX



- Los trabajos de Boole (1847, 1854) y De Morgan (1847) intentan formalizar la lógica Aristotélica de manera algebraica
- La principal regla para las demostraciones es la famosa regla de ...
- Esta forma de trabajo debería ser conocida por ustedes

# Logicismo

Fines del siglo XIX - Medios del siglo XX

- Gottlob Frege publica *Begriffsschriif* en 1879, en un intento por reducir la matemática a la lógica.
- Si bien los aportes de Frege son enormes, la teoría de conjuntos que usaba tenía una pequeña falla, era **inconsistente**.
- Russel le escribe una carta en 1903, haciéndole notar esta situación.

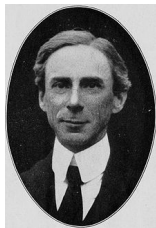




# Logicismo

Fines del siglo XIX - Medios del siglo XX

- Gottlob Frege publica *Begriffsschriif* en 1879, en un intento por reducir la matemática a la lógica.
- Si bien los aportes de Frege son enormes, la teoría de conjuntos que usaba tenía una pequeña falla, era **inconsistente**.
- Russel le escribe una carta en 1903, haciéndole notar esta situación.



- A partir de 1910, Russel y Whitehead publican los *Principia Mathematica*, solucionando la paradoja mediante una **teoría de tipos**.
- Los PM intenta formalizar todos los teoremas de la matemática a partir de axiomas y reglas de inferencia bien definidos.

# Formalismo - El programa de Hilbert

Primera mitad del siglo XX



- Acabemos con las paradojas, solucionemos la *crisis fundacional de la matemática*.
- Formalicemos la matemática mediante un conjunto finito de axiomas y reglas,
- y probemos la consistencia y completitud de este sistema usando estas reglas.
- De paso, cada teorema del sistema debería ser *decidible*.

# Incompletitud

El programa de Hilbert se cuelga

- En 1931 Kurt Gödel demuestra el Teorema de Incompletitud.



# Incompletitud

El programa de Hilbert se cuelga

- En 1931 Kurt Gödel demuestra el Teorema de Incompletitud.

*En cualquier sistema consistente capaz de representar la aritmética de Peano existen proposiciones verdaderas que no pueden demostrarse a partir de los axiomas.*



# Incompletitud

El programa de Hilbert se cuelga

- En 1931 Kurt Gödel demuestra el Teorema de Incompletitud.

*En cualquier sistema consistente capaz de representar la aritmética de Peano existen proposiciones verdaderas que no pueden demostrarse a partir de los axiomas.*

- Peor aun, una de estas sentencias válidas pero no demostrables es la *consistencia* del sistema.



# Entscheidungsproblem

Leibniz (siglo XVII) - Hilbert (1928)

- Básicamente, pide encontrar un algoritmo, que dada una proposición sobre la matemática, devuelva “True” o “False” de acuerdo a su validez.
- Formalmente, se reduce a un problema de decisión sobre la lógica de primer orden **¿Dada una fórmula de primer orden, existe un algoritmo que decida su validez?**

# Entscheidungsproblem

Leibniz (siglo XVII) - Hilbert (1928)

- Básicamente, pide encontrar un algoritmo, que dada una proposición sobre la matemática, devuelva “True” o “False” de acuerdo a su validez.
- Formalmente, se reduce a un problema de decisión sobre la lógica de primer orden **¿Dada una fórmula de primer orden, existe un algoritmo que decida su validez?**
  - ▶ Para Hilbert, la respuesta a este problema era afirmativa.

# Entscheidungsproblem

Leibniz (siglo XVII) - Hilbert (1928)

- Básicamente, pide encontrar un algoritmo, que dada una proposición sobre la matemática, devuelva “True” o “False” de acuerdo a su validez.
- Formalmente, se reduce a un problema de decisión sobre la lógica de primer orden **¿Dada una fórmula de primer orden, existe un algoritmo que decida su validez?**



- ▶ Para Hilbert, la respuesta a este problema era afirmativa.
- ▶ Alan Turing y Alonzo Church prueban, independientemente, que no es posible construir tal algoritmo.





# Hay mucho más



- Tarski desarrolla, a partir de mediados del siglo pasado, la *Teoría de modelos*, y la *lógica relacional*.

# Hay mucho más



- Tarski desarrolla, a partir de mediados del siglo pasado, la *Teoría de modelos*, y la *lógica relacional*.

- Łukasiewicz (1920), Post (1921), Gödel (1932) y Kleene (1938) utilizan lógicas multivaluadas en el contexto de sus investigaciones.
- Las lógicas multivaluadas tienen múltiples aplicaciones en CC:
  - ▶ Lingüística.
  - ▶ Inteligencia artificial.
  - ▶ Diseño de hardware.

AND	True	False	Null
True	True	False	Null
False	False	False	Null
Null	Null	Null	Null

OR	True	False	Null
True	True	True	Null
False	True	False	Null
Null	Null	Null	Null

XOR	True	False	Null
True	False	True	Null
False	True	False	Null
Null	Null	Null	Null

# Hay mucho más



- El isomorfismo de Curry - Howard nos permite relacionar estrechamente los sistemas de prueba que usamos en lógica con los modelos de programación funcional.

# Hay mucho más



- El isomorfismo de Curry - Howard nos permite relacionar estrechamente los sistemas de prueba que usamos en lógica con los modelos de programación funcional.

¡Demostrar es programar!

¡Programar es demostrar!

# Hay mucho más



- El isomorfismo de Curry - Howard nos permite relacionar estrechamente los sistemas de prueba que usamos en lógica con los modelos de programación funcional.

¡Demostrar es programar!

¡Programar es demostrar!

- Martin-Lof desarrolla su teoría de tipos intuicionista (1972), con la intención de formalizar la matemática constructiva.
- Sobre el final, comenta que esta teoría puede verse como un *lenguaje de programación*.



# Todavía más

Lógica Lineal      Lógica Intuicionista  
Lógica Clásica      Lógica No Monótona  
Lógica Posibilística  
Lógica Alternante      Lógica Extensional  
Lógica Probabilística      Lógica Modal  
Lógica Difusa      Lógica Ecuacional  
Lógica Temporal      Lógica de alto orden  
Lógica Combinatoria      Lógica Intensional  
Lógica Paraconsistente      Lógica de Creencias  
Lógica Relacional      Lógica Multivaluada  
Lógica Inductiva      Lógica Deóntica

# Outline

- 1 Introducción (burocracia)
- 2 Un poco de historia
- 3 Algunos conceptos básicos**
- 4 Aplicaciones

# Razonamientos

- Un **razonamiento** es una lista de proposiciones.
- La última proposición de la lista es la *conclusión* del razonamiento,
- y todas las anteriores, si las hay, son las *premisas*.



# Razonamientos

- Un **razonamiento** es una lista de proposiciones.
- La última proposición de la lista es la *conclusión* del razonamiento,
- y todas las anteriores, si las hay, son las *premisas*.
- Observemos que es una definición un poco general:

Lógica es una materia de segundo año

Central ganó cuatro clásicos seguidos

∴ A Luca Prodan le gustaba jugar al truco

# Razonamientos

- Un **razonamiento** es una lista de proposiciones.
- La última proposición de la lista es la *conclusión* del razonamiento,
- y todas las anteriores, si las hay, son las *premisas*.
- Observemos que es una definición un poco general:
  - Lógica es una materia de segundo año
  - Central ganó cuatro clásicos seguidos
  - ∴ A Luca Prodan le gustaba jugar al truco
- A pesar de ser un muy mal razonamiento, cumple con la definición.
- Una tarea del curso será poder, formalmente, distinguir los *buenos* razonamientos de los *malos* razonamiento.

# Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:  
Ustedes asisten a esta clase  
Esta es una clase de lógica  
 $\therefore$  Ustedes son estudiantes de lógica

# Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:  
Ustedes asisten a esta clase  
Esta es una clase de lógica  
 $\therefore$  Ustedes son estudiantes de lógica
- Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido.

# Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:  
Ustedes asisten a esta clase  
Esta es una clase de lógica  
 $\therefore$  Ustedes son estudiantes de lógica
- Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido.
- La validez de la conclusión no se desprende *necesariamente* de la validez de las premisas.

# Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:  
Ustedes asisten a esta clase  
Esta es una clase de lógica  
 $\therefore$  Ustedes son estudiantes de lógica
- Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido.
- La validez de la conclusión no se desprende *necesariamente* de la validez de las premisas.
- Sin embargo, hay algunos modelos lógicos que permiten analizar esta clase de argumentos.

# Validez deductiva

- Un razonamiento es deductivamente válido si y sólo si es imposible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa.
  - Las naranjas son frutas o instrumentos musicales
  - Las naranjas no son frutas
  - $\therefore$  Las naranjas son instrumentos musicales

# Validez deductiva

- Un razonamiento es deductivamente válido si y sólo si es imposible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa.
  - Las naranjas son frutas o instrumentos musicales
  - Las naranjas no son frutas
  - ∴ Las naranjas son instrumentos musicales
- A pesar de obtener una conclusión ridícula, observemos que la *forma lógica* del razonamiento es correcta.
- Si ambas premisas son ciertas, *necesariamente* la conclusión debe ser cierta.



# Validez deductiva

- La validez de las premisas y la conclusión no nos asegura la validez del razonamiento:

Santa Rosa es la capital de La Pampa

La Plata es la capital de Buenos Aires

$\therefore$  Posadas es la capital de Misiones

# Validez deductiva

- La validez de las premisas y la conclusión no nos asegura la validez del razonamiento:

Santa Rosa es la capital de La Pampa

La Plata es la capital de Buenos Aires

∴ Posadas es la capital de Misiones

- ¿Qué sucede si Brasil invade Misiones y la anexa a un estado ya existente?
- Es *lógicamente* posible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa.
- Existe un *modelo* que hace inválido el razonamiento.

# Valores de verdad

- En el lenguaje que utilizaremos, siempre trabajaremos con proposiciones.
- Es decir, oraciones a las que se les puede asignar un valor de verdad.
- Estos valores de verdad serán en este curso *true* y *false*.
- Sin embargo, hay modelos lógicos que permiten asignar más de dos (a veces infinitos) valores de verdad a una proposición.
- Muy probablemente estudien estos modelos en IAA.

# Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, o no
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo

# Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, o no
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo
- Observemos que, independientemente de cuándo analicemos estas proposiciones diferentes resultados para la validez de las frases.

- Consideremos las siguientes proposiciones:

- ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo

## Contingencia

- ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, o no

- ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo

- Observemos que, independientemente de cuándo analicemos estas proposiciones diferentes resultados para la validez de las frases.

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, o no

## Tautología

- ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo
- Observemos que, independientemente de cuándo analicemos estas proposiciones diferentes resultados para la validez de las frases.

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, o no
  - ▶ Pamela lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo

## Contradicción

- Observemos que, independientemente de cuándo analicemos estas proposiciones diferentes resultados para la validez de las frases.



# Equivalencia lógica

- Consideremos las siguientes frases:
  - ▶ Si llueve el domingo me quedaré en casa.
  - ▶ Si salgo el domingo es porque no llueve.
- Observemos que ambas frases son contingencias
- La validez de una implica necesariamente la validez de la otra.
- Diremos que ambas proposiciones son **lógicamente equivalentes**.

# Consistencia

- Analicemos las siguientes frases:
  - ▶ *Más de la mitad de los estudiantes de lógica son más altos que yo.*
  - ▶ *Soy más alto que más de la mitad de los estudiante de lógica.*

# Consistencia

- Analicemos las siguientes frases:
  - ▶ *Más de la mitad de los estudiantes de lógica son más altos que yo.*
  - ▶ *Soy más alto que más de la mitad de los estudiante de lógica.*
- No sabemos, ni nos importa, el valor de verdad de las proposiciones.
- Lo que sí sabemos es que ambas no pueden ser ciertas a la vez.

# Consistencia

- Analicemos las siguientes frases:
  - ▶ *Más de la mitad de los estudiantes de lógica son más altos que yo.*
  - ▶ *Soy más alto que más de la mitad de los estudiante de lógica.*
- No sabemos, ni nos importa, el valor de verdad de las proposiciones.
- Lo que sí sabemos es que ambas no pueden ser ciertas a la vez.
- **Un conjunto de fórmulas con esta característica se dice inconsistente.**

# Outline

- 1 Introducción (burocracia)
- 2 Un poco de historia
- 3 Algunos conceptos básicos
- 4 Aplicaciones**

# Áreas de CC donde la lógica juega un papel fundamental

- Ingeniería del software
- Bases de datos
- Complejidad
- Verificación de modelos
- Semántica de lenguajes de programación
- Verificación de programas

# Para terminar, un juego

Wason Selection Task (Wason, 1966)

- Se ponen sobre la mesa cuatro cartas
- Cada carta tiene un número de un lado y una letra del otro
- Se realiza una proposición  $P$  concerniente a las cartas
- Se invita a responder la siguiente pregunta:  
    ¿Cuál o cuáles cartas debo dar vuelta para verificar si la propiedad  $P$  es cierta?

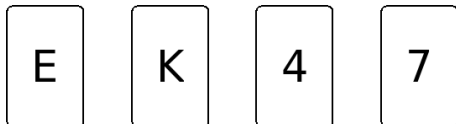
# Para terminar, un juego

Wason Selection Task (Wason, 1966)

- Aquí están la propiedad  $P$ :

*Si una carta tiene una vocal de un lado, entonces tiene un número par del otro lado*

- Aquí están las cartas sobre la mesa:



- ¿Qué carta(s) debe(n) darse vuelta?