Práctica 0: Relaciones

1. En el conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, considerar la relación

$$R = \{(0,1),(0,3),(1,1),(1,5),(3,2),(3,8),(4,4),(4,9),(5,1),(5,2),(5,3),(5,9),(6,2),(6,8),(7,1),(7,7),(7,9)\}.$$

1. Graficar R.
2. Determinar:
   a) $R(0)$, $R(\{1,2,3\})$, $R(A)$.
   b) $R^{-1}(0)$, $R^{-1}(\{1,2,3\})$, $R^{-1}(A)$.

2. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A. Probar:

1. $\mathsf{dom}(R \cap S) \subset \mathsf{dom}(R) \cap \mathsf{dom}(S)$.
2. $\mathsf{dom}(R \cup S) = \mathsf{dom}(R) \cup \mathsf{dom}(S)$.
3. $\mathsf{dom}(R - S) \supset \mathsf{dom}(R) - \mathsf{dom}(S)$.
4. $\mathsf{im}(R \cap S) \subset \mathsf{im}(R) \cap \mathsf{im}(S)$.
5. $\mathsf{im}(R \cup S) = \mathsf{im}(R) \cup \mathsf{im}(S)$.
6. $\mathsf{im}(R - S) \supset \mathsf{im}(R) - \mathsf{im}(S)$.

3. Sean $R \in \mathsf{Rel}(A,B)$ y $S \in \mathsf{Rel}(B,C)$ relaciones, construir una relación $R \circ S \in \mathsf{Rel}(A,C)$. Mostrar que esta construcción es asociativa.

4. Mostrar que $\mathsf{Rel}(A,B)$ es "equivalente" a $A \to \mathcal{P}(B)$.

5. Sean R, S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 relaciones apropiadas. Probar:

1. $R \subseteq R \circ R^{-1} \circ R$
2. $S_1 \subseteq S_2$ y $T_1 \subseteq T_2$ implica que $(S_1 \circ T_1) \subseteq (S_2 \circ T_2)$
3. $(R \circ S) \cap T \subseteq R \circ (S \cap (R^{-1} \circ T))$

6. Sea $R \in \mathsf{Rel}(A,A)$. Probar:

1. R reflexiva sii $\Delta_A \subseteq R$

2. R simétrica sii $R \subseteq R^{-1}$
3. R antisimétrica sii $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$
4. R transitiva sii $R \circ R \subseteq R$

donde $\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

7. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A. Determinar la validez de los siguientes enunciados:

1. Si R y S son reflexivas, entonces $R \cap S$ también lo es.
2. Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ también lo es.
3. Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ también lo es.
4. Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ también lo es.
5. Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cap S$ también lo es.
6. Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cup S$ también lo es.
7. Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ también lo es.
8. Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ también lo es.
9. Si R es reflexiva (simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces R^{-1} también lo es.

8. Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántas relaciones hay en A? ¿Cuántas relaciones tales que $R(A) = A$ hay en A? ¿Cuántas relaciones reflexivas hay en A?

9. Analizar si las siguientes relaciones son o no relaciones de equivalencia:

1. En $\mathbb{Z}$, la relación $aRb \Leftrightarrow a - b$ es par.
2. En $\{f : A \to B\}$ las relaciones siguientes:
   a) $fRg \Leftrightarrow f(A) \subset g(A)$.
   b) $fRg \Leftrightarrow f(A) = g(A)$.
   c) $fRg \Leftrightarrow f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$.
3. Isomorfismo de grafos.

10. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la siguiente relación:

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + d = c + b.$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia.
2. Mostrar en un esquema la clase de equivalencia de $(1,1)$ definida por R.

11. Dada $f : A \to B$, probar que $\mathsf{ker}(f)$ es una relación de equivalencia sobre A:

$$\mathsf{ker}(f) = \{(a, a') \mid a, a' \in A, f(a) = f(a')\}$$

12. Sea $\mathsf{espar} : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ la función que toma valor True en los pares y valor False en los impares. Calcular $\mathbb{N}/\mathrm{ker}(\mathsf{espar})$.

13. Dar una definición de $\mathsf{ker}(f)$ en términos de f, la composición y la inversa de relaciones (no vale usar pertenencia, comprensión de conjuntos, etc.).

14. Dada una función $f : A \to B$ y una relación de equivalencia $R \subseteq \mathsf{ker}(f)$, probar que existen $h : A \to A/R$ y $g : A/R \to B$ tal que $f = g \circ h$.