Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencias de la Computación
Complementos de Matemática II

Práctica 1: Relaciones de orden

1. Probar que en el conjunto $\{a, b\}$, hay tres órdenes posibles. ¿Y en $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, c, d\}$?

2. $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación "*divide a*".

1. Verificar que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto ordenado.
2. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?
3. Si S es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por $|$ en S.

3. **Yoneda Lemma.** Probar que en un preorden $(P, \preceq)$ vale: $x \preceq y$ sii $\forall z. z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$.

4. Sea A un conjunto arbitrario. Verificar que $(\mathcal{P}(A), \subset)$ es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

5. Sea $V = \{a, b, c, d, e\}$. El grafo dirigido de la sgte. figura define un orden en V de la siguiente manera: $x \preceq y$ sii $x = y$ o existe un xy-camino dirigido.

$$\begin{tikzcd}
 & & a & \\
 & b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \\
d \arrow[ur] & & e \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

1. Insertar el símbolo correcto, $\preceq$, $\succeq$ o $\|$ (no comparable), entre cada par de elementos:

   (a) a ___ e (b) b ___ c (c) d ___ a (d) c ___ d

2. ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

6. Sea $(P, \preceq)$ un conjunto ordenado, X un conjunto, y $p : X \to P$ una función. Se define la relación H sobre elementos de X como xHx' sii $p(x) \preceq p(x')$. ¿Qué tipo de relación es H? Dar condiciones para que H sea un conjunto ordenado.

7. (Prop, D), donde Prop son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D \psi$ sii $\{\phi\} \vdash \psi$.

1. Verificar si (Prop, D) es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

2. ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

8. (Prop, I), donde $\phi I \psi$ vale sii $\emptyset \vdash \phi \Rightarrow \psi$.

1. Verificar si (Prop, I) es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
2. ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?
3. Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

9. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Construir un conjunto ordenado $(P/\sim, \sqsubseteq)$, donde $x \sim y$ sii $x \preceq y$ y $y \preceq x$, tal que $\pi : P \to P/\sim$ sea monótona.
Aplicar esta construcción a la relación (Prop, D) del ejercicio anterior. Para este caso particular, la construcción se llama *álgebra de Lindenbaum-Tarski*.

10. Probar que

1. Si R define un orden en el conjunto V, entonces R^{-1} también define un orden en V, llamado *orden inverso*.
2. Si R define un orden total en el conjunto V, entonces R^{-1} también define un orden total en V.
3. Si $(A, \preceq)$ es un orden, pero no total, puede existir un $S \subset A$ tal que $(S, \preceq)$ es un orden total.

11. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

12. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).

1. ¿Define $\preceq_1 \cap \preceq_2$ un orden en A?
2. ¿Define $\preceq_1 \cup \preceq_2$ un orden en A?

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

14. Considerar el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y el de los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ con sus órdenes usuales. Probar que $\mathbb{Z}^+ \not\simeq \mathbb{Z}^-$.

15. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto ordenado. Para todo elemento $a \in A$ definamos

$$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}.$$

Si $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$, ordenado por la inclusión, demostrar que $A \simeq \mathcal{A}$.

16. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados.

1. Dar un ejemplo de conjuntos $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ y una función $f : X \to Y$ que sea sobreyectiva y preserve el orden pero que no sea un isomorfismo de conjuntos ordenados.

2. Probar que son equivalentes:

   a) X e Y son isomorfos.

   b) Existe $f : X \to Y$ sobreyectiva tal que $f(a) \preceq_Y f(b)$ si y sólo si $a \preceq_X b$.

   c) Existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ homomorfismos de conjuntos ordenados tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$.

3. Mostrar que $(X \to Y, \preceq_{X \to Y})$ es un conjunto ordenado, donde $X \to Y$ representa las funciones entre $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$, y el orden está definido por $f \preceq_{X \to Y} g$ sii $\forall x. f(x) \preceq_Y g(x)$.

4. Mostrar que $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$ es un conjunto ordenado, donde $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y')$ sii $x \preceq_X x'$ y $y \preceq_Y y'$.

17. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados. Una *conexión Galois* es un par de funciones (f_*, f^*) con $f_* : X \to Y$, $f^* : Y \to X$ tal que para todos $x \in X$ y $y \in Y$ vale: $f_*(x) \preceq_Y y$ sii $x \preceq_X f^*(y)$.

1. Probar que si $f_* : X \to Y$ es un isomorfismo, entonces (f_*, f_*^{-1}) es una conexión Galois.

2. Dada una función $f : A \to B$, probar que se puede construir una conexión Galois entre el conjunto potencia de A y el de B utilizando los operadores que calculan la imagen de f sobre un subconjunto de A y la imagen inversa de f sobre un subconjunto de B.

3. Considerando los órdenes usuales sobre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_0^+$, encontrar f^* tal que (f_*, f^*) sea una conexión Galois donde $f_* : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_0^+$ es la inclusión.

4. Dada una conexión Galois (f_*, f^*) entre X y Y, probar que para todo $x \in X$, $y \in Y$, vale $x \preceq_X f^*(f_*(x))$ y $f_*(f^*(y)) \preceq_Y y$.

5. Dada una conexión Galois (f_*, f^*) entre X y Y, probar que f_* y f^* son monótonas.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.