Práctica 2: Retículos

1. Dar diagramas para:

1. Los retículos con 5 elementos.
2. Los retículos con 6 elementos.
3. El retículo de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

2. Interpretar $\wedge$ y $\vee$ en los siguientes conjuntos ordenados

1. $(\mathcal{P}(A), \subset)$, donde A es un conjunto arbitrario.
2. $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación "*divide a*".
3. Álgebra de Lindenbaum-Tarski (ver ejercicio práctica anterior).

3. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo.

1. Probar que para todos $x, y, z \in X$ se satisface:
   a) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
   b) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
   c) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.
2. Probar que si una de las desigualdades anteriores es una igualdad, las restantes también lo son.

4. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos:

1. $\{x \in X : x \leq a\}$.
2. $\{x \in X : b \leq x\}$.
3. $\{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

5. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Un *polinomio* p en n-variables es una función $p : L^n \to L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L:

- Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi_i \in P_L$, donde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \vee g(\bar{x})$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \wedge g(\bar{x})$.

Sea f un polinomio en n-variables, y $x_i \preceq y_i$ para cada i de 1 a n. Probar que $f(x_1, \ldots, x_n) \preceq f(y_1, \ldots, y_n)$.

6. Un retículo L se llama *modular* si para todos $a, b, c \in L$ es

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Probar que son equivalentes:

1. L es modular.
2. $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in L$.
3. $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in L$.
4. $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in L$.

7. Probar que todo retículo distributivo es modular. ¿Es cierta la recíproca?

8. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que:

1. Si $\vee$ tiene elemento neutro 0, entonces $a \wedge 0 = 0$ para todo $a \in X$.
2. Si $\wedge$ tiene elemento neutro 1, entonces $a \vee 1 = 1$ para todo $a \in X$.

9. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos con 0 y 1, y $h : X \to Y$ y $h : X \to Y$ un homomorfismo de retículo. Mostrar con un ejemplo que no siempre $h(1_X) = 1_Y$ o $h(0_X) = 0_Y$.

10. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo acotado (con 0 y 1). Dado $a \in X$, si existe $b \in X$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, b se llama *complemento* de a, y en caso de ser único, se nota $\overline{a}$. Probar que:

1. $\overline{\overline{a}} = a$.
2. $\overline{0} = 1$.
3. Si X es distributivo, $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$ y $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$.

11. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos y $h : X \to Y$ un homomorfismo de retículo. Probar que:

1. $h(X)$ es un subretículo de Y.

2. Si X es distributivo, $h(X)$ es distributivo.

12. Verificar que todo isomorfismo de retículos se corresponde con un isomorfismo de conjuntos ordenados.

13. Probar que el retículo potencia de cualquier conjunto es completo.

14. Knaster-Tarski Sea $(L, \sqsubseteq)$ un retículo completo, y $f : L \to L$ una función monótona. Probar que el mínimo punto fijo de f es $\bigwedge\{x \in L | f(x) \sqsubseteq x\}$.

15. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para definir el conjunto inductivo de los números pares como el mínimo punto fijo de una función monótona. La definición inductiva del cjto. de pares era: P es el conjunto que satisface

- $0 \in P$.
- Si $n \in P$, entonces $n + 2 \in P$.
- "Estos son todos".

16. Sea $(P, \leq)$ un orden total. Probar que P es un retículo distributivo.

17. Retículo completo Sea $(P, \leq)$ un orden. Probar que si todo subconjunto de P tiene supremo, entonces todo subconjunto de P tiene ínfimo.

18. Un *álgebra de Boole* es un retículo acotado distributivo con complementos.

1. Dar un ejemplo de álgebra de Boole de los retículos vistos en clase.
2. Probar que $O_n = (\{x \in \mathbb{N} : x \mid n\}, |)$ es un álgebra de Boole si n es producto de factores primos distintos.
3. Enunciar y probar la ley de Morgan para las álgebras de Boole.
4. Si $(L, \leq)$ es un álgebra de Boole, entonces para $x, y \in L$ si $x \leq y$ entonces $\bar{y} \leq \bar{x}$.
5. Si $(L, \leq)$, $(L', \leq')$ son álgebras de Boole, entonces todo isomorfismo de conjuntos ordenados de L en L' preserva complementos.
6. Sean $(L, \leq)$, $(L', \leq')$ álgebras de Boole. Construir un orden para $L \times L'$ y probar que es un álgebra de Boole.