Práctica 5: Teoría de categorías (continuación)

1. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $\mathsf{Bool} = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos true y a i_2 le llamamos false.
Escribir un morfismo $not : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$ tal que

$$not \circ \mathsf{true} = \mathsf{false}$$

$$not \circ \mathsf{false} = \mathsf{true}$$

¿Puede escribir un morfismo $and : \mathsf{Bool} \times \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$ que se comporte como la conjunción?

2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciales,

1. Probar $\mathsf{curry}(\mathsf{eval}_{A,B}) = id_{B^A}$.
2. Dado un morfismo $f : B \to C$, construir un morfismo $B^A \to C^A$.
3. Dado un morfismo $f : A \to C^B$, construir un morfismo $\mathsf{uncurry}(f) : A \times B \to C$.
4. Probar $\mathsf{uncurry}(\mathsf{curry}(f)) = f$ y $\mathsf{curry}(\mathsf{uncurry}(f)) = f$.

3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciales, y A un objeto de la misma,

1. Extender con estructura functorial la función que lleva B a $B^A \times A$.
2. Mostrar que $e_B = \mathsf{eval}_{A,B}$ es una transformación natural entre el functor del apartado anterior y el functor identidad sobre $\mathcal{C}$.

4. Una categoría se dice *distributiva* si tiene productos finitos, coproductos finitos, y para todos objetos A, B, C, los morfismos

$$\mathsf{i}_{0\times A} : 0 \to 0 \times A$$

$$[\iota_1 \times id_C, \iota_2 \times id_C] : A \times C + B \times C \to (A + B) \times C$$

son isomorfismos.
Probar que toda CCC con coproductos finitos es distributiva.

5. Probar los siguientes isomorfismos:

$$A^0 \cong 1 \qquad A^1 \cong A \qquad A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

6. Una mónada en $\mathcal{C}$ es una tripla (M, η, μ) donde $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un functor, $\eta : \mathsf{Id} \to M$ y $\mu : M \circ M \to M$ son transformaciones naturales, tal que se satisfacen las leyes:

$$\mu \circ \eta = id_{MA}$$

$$\mu \circ M\eta = id_{MA}$$

$$\mu \circ \mu = \mu \circ M\mu$$

Dada una mónada (M, η, μ) sobre $\mathcal{C}$, se puede construir su *categoría Kleisli* (notada $\mathcal{C}_M$) correspondiente:

- Sus objetos son los mismos que los de $\mathcal{C}$.
- Por cada morfismo $A \to MB$ en $\mathcal{C}$, hay un morfismo $A \to B$ en $\mathcal{C}_M$.

1. Definir la composición en $\mathcal{C}_M$, y probar que efectivamente $\mathcal{C}_M$ es una categoría.
2. Definir un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_M$ que en los objetos se comporte $FA = A$.
3. Definir un functor $U : \mathcal{C}_M \to \mathcal{C}$ que en los objetos se comporte $UA = MA$.

7. Sea $(M, \otimes, e)$ un monoide. Se define el endofunctor $F(X) = M \times X$ sobre Set. Dar estructura monádica a F, i.e. transformaciones naturales η y μ tal que los axiomas de mónadas se cumplan.

8. Diremos que una tupla (M, μ) es una semi-mónada sobre $\mathcal{C}$ cuando $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un functor, y $\mu : M \circ M \to M$ es una transformación natural tal que $\mu \circ \mu = \mu \circ M\mu$.
Decimos que la semi-mónada (M, μ) se puede extender via $\eta : \mathsf{Id} \to M$ a una mónada si la tripla (M, μ, η) es una mónada. Probar que una semi-mónada tiene una única posible extensión.

9. Sea Form el conjunto de fórmulas de la lógica proposicional. Se ha probado en prácticas anteriores que $\mathcal{P}(\mathsf{Form})$ forma un poset, y por ende, se lo puede interpretar como una categoría. Dar un ejemplo de mónada sobre $\mathcal{P}(\mathsf{Form})$.

10. Sea C una categoría cartesiana cerrada, y R un objeto de la misma.

1. Definir un functor $F : C \to C$ que en objetos actue con ley $FX = R^{R^X}$, y probar que efectivamente es un functor.
2. Definir una transformación natural $\eta : \mathsf{Id} \to F$, y probar que efectivamente es una transformación natural.

Ayuda: puede ser útil probar el lema $\mathsf{curry}(f) \circ g = \mathsf{curry}(f \circ (g \times id))$

11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria, y P un preorden visto como categoría. Sean $S, T : \mathcal{C} \to P$ functores. Mostrar que existe una única transformación natural $\tau : S \to T$ sii $S(A) \leq T(A)$ para cada objeto A de $\mathcal{C}$.

12. Podemos definir una categoría sencilla, de nombre 2, que consta de ver al conjunto ordenado $\{0, 1\}$ (con el orden usual, $0 \leq 1$) como una categoría:

$$0 \xrightarrow{f} 1$$

Sean C, D dos categorías, y $F, G : C \to D$ dos functores entre ellas. Decimos que un functor $H : C \times 2 \to D$ es una homotopía entre los functores F y G, si

- $H((X, 0)) = F(X)$, $H((f, id_0)) = F(f)$,
- $H((X, 1)) = G(X)$, $H((f, id_1)) = G(f)$.

Probar que el concepto de homotopía entre dos functores coincide con la noción de transformación natural, esto es, dada una transformación natural $\alpha : F \to G$, se puede construir una homotopía $H : C \times 2 \to D$ entre F y G, y viceversa.

13. Probar o refutar: sea $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ el funtor forgetful de grupos, entonces toda transformación natural $\eta : U \to U$ es un isomorfismo natural.

14. Enunciar y probar el Yoneda lemma para functores contravariantes.

15. Si $F \dashv G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una adjunción dada en términos de unidad (η), entonces Pierce dice que la existencia de la counidad, i.e. una transformación natural $\epsilon : F \circ G \to \mathsf{Id}$, se puede mostrar. Construir esta counidad.

16. Cuando se tiene una adjunción $F \dashv G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ existe una biyección entre morfismos de la forma $X \to G(Y)$ y morfismos de la forma $F(X) \to Y$. Construir funciones que representen esta biyección.

17. Explicar qué es una adjunción en el caso de que las categorías en cuestión sean conjuntos ordenados vistos como categorías.

18. El functor diagonal sobre la categoría $\mathcal{C}$ se define como $\Delta : C \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, donde $\Delta(X) = (X, X)$. Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene productos, entonces además se puede definir un functor $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dado por $\Pi(X, Y) = X \times Y$. Dar una relación de adjunción entre Π y Δ. Dar un resultado análogo respecto al functor $\Sigma(X, Y) = X + Y$ cuando $\mathcal{C}$ tiene coproductos.

19. Probar que $S \times - \dashv -^S : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ donde S es algún conjunto.

20. Probar que toda adjunción $F \dashv G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ da origen a una mónada para el endofunctor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

21. Explicar qué mónada se genera al combinar los últimos dos ejercicios.

22. Probar que dada una mónada (M, μ, η), esta se puede factorizar $M = G \circ F$ mediante una adjunción como en el ejercicio anterior. Ayuda: considerar la categoría Kleisli y los functores definidos en el ejercicio.